Taller de resolución de problemas de concurso Universidad de Puerto Rico Colegio Universitario de Cayey

Dr. David A. SANTOS

Índice General

Capítulo 1

Progresiones aritméticas

Consideremos el siguiente problema.

Ejemplo 1.0.1 Si la sucesión de términos $6, 10, 14, 18, 22, \ldots$ sigue la misma ley de formación, hallar los términos 10^{mo}, 50^{avo}, 100^{avo}. ¿Puede hallar el n-ésimo término?

Solución: Observemos que cada término se obtiene sumándole 4 al término anterior. Así:

$$10 = 6 + 4, 14 = 10 + 4, 18 = 14 + 4, 22 = 18 + 4, \ldots$$

Pero aún podemos ir más lejos. Podemos expresar cada término en términos del primero. Luego

$$\begin{array}{lcll} 6 & = & 6 + 0 \cdot 4 & \text{primer término} \\ 10 & = & 6 + 1 \cdot 4 & \text{segundo término} \\ 14 & = & 6 + 2 \cdot 4 & \text{tercer término} \\ 18 & = & 6 + 3 \cdot 4 & \text{cuarto término} \\ 22 & = & 6 + 4 \cdot 4 & \text{quinto término.} \end{array}$$

Si el patrón de formación es respetado para los términos subsiguientes entonces deberíamos tener: décimo término $= 6 + 9 \cdot 4 = 42$, cincuentavo término $= 6 + 49 \cdot 4 = 202$ y cienavo término $= 6 + 99 \cdot 4 = 402$. De igual manera deducimos que el enésimo término es $= 6 + 4(n - 1)$.

Una progresión como la del ejemplo previo, en donde la diferencia de términos consecutivos es constante se llama *progresión aritmética.* Así

$$-18, -12, -6, 0, 6, 12, \ldots$$

es una progresión aritmética de *diferencia común* 6, mientras que $1, 3, 7, 97, \ldots$ no lo es, ya que términos sucesivos no guardan diferencia constante.

En general, si comenzamos con un número arbitrario, digamos a y si guardamos una diferencia común de d, entonces obtenemos la progresión aritmética $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$, con término en la posición n igual a $a + (n - 1)d$.

Ejemplo 1.0.2 Hallar el 35$^{\text{avo}}$ término de una progresión aritmética cuyo 27$^{\text{avo}}$ término es 186 y cuyo 45$^{\text{avo}}$ término es 312.

Solución: Tratemos de expresar la data que sabemos en términos del primer término y la diferencia común. Como no se nos da el primer término, llamémosle a y a la diferencia común llamémosla d. Así el primer término es a, el segundo $a + d$, el tercero $a + d + d = a + 2d$, el cuarto $a + 2d + d = a + 3d$, etc. Así el 27$^{\text{avo}}$ término debe ser $a + 26d$ y el 45$^{\text{avo}}$ término debe ser $a + 44d$. Pero la data del problema estipula que $a + 26d = 186$ y $a + 44d = 312$. De aquí $(a + 44d) - (a + 26d) = 312 - 186 = 126$, i.e., $18d = 126$ o $d = 7$. Pero entonces $186 = a + 26d = a + 26 \cdot 7 = a + 182$, de donde $a = 4$. Finalmente el 35$^{\text{avo}}$ término, o sea, $a + 34d$ está dado por $a + 34d = 4 + 34(7) = 242$.

Veremos ahora como sumar progresiones aritméticas.

Ejemplo 1.0.3 Sumar la progresión aritmética

$$7 + 15 + 23 + \cdots + 807.$$

Solución: Vemos que los términos están en progresión aritmética: $7, 7+8\cdot 1, 7+8\cdot 2, \ldots, 7+8\cdot 100$. Observe que si $S = 7 + 15 + 23 + \cdots + 807$, entonces también $S = 807 + 799 + 791 + \cdots + 7$. Así: $2S = (7 + 807) + (15 + 799) + (23 + 791) + \cdots + (807 + 7) = 101 \cdot 814 = 82214$. Finalmente, $S = 41107$.

Ejemplo 1.0.4 Sumar $5/2, 1, -1/2, \ldots$ hasta 19 términos.

Solución: La diferencia común es $-3/2$. Luego el primer término es $5/2 = 5/2+0(-3/2)$, el segundo $1 = 5/2+1(-3/2)$, el tercero $-1/2 = 5/2+2(-3/2)$, $\ldots$, el diecinueveavo término $5/2 + 18(-3/2) = -49/2$. Así, la suma que queremos es

$$S = 5/2 + 1 - 1/2 - \cdots - 49/2.$$

Operando como en los ejemplos anteriores,

$$\begin{aligned} 2S &= (5/2-49/2)+(1-46/2)+(-1/2-43/2)+\cdots+(-49/2+5/2) \\ &= -44/2-44/2-44/2-\cdots-44/2 \\ &= 19(-44/2) \\ &= -418. \end{aligned}$$

Colegimos luego que $S=-209$.

La siguiente fórmula ocurre con regularidad y el lector hará bien en aprender a deducirla. Si

$$A_n = 1+2+3+\cdots+n$$

entonces también

$$A_n = n+(n-1)+\cdots+1.$$

Sumando estas dos cantidades,

$$\begin{array}{ccccccccc} A_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ A_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 1 \\ 2A_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) \\ & = & n(n+1), & & & & & & \end{array}$$

puesto que hay n sumandos. De esto colegimos

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.0.5 Hallar el valor de la suma

$$1-2+3-4+5-6+\cdots+99-100.$$

Solución: Observe que $-1=1-2=3-4=\cdots=99-100$. Luego agrupando la suma en cincuenta pares que suman -1, tenemos

$$1-2+3-4+5-6+\cdots+99-100=-50.$$

Ejemplo 1.0.6 Hallar la suma

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots+99^2-100^2.$$

Solución: Como $x^2-(x+1)^2=-2x-1$, tenemos

$$(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+\cdots+(99^2-100^2) = -(3+7+11+\cdots+199) = -5050.$$

Problemas

Problema 1.1 Hallar los términos 14 y 110 de la progresión $43, 42, 41, \ldots$.

Problema 1.2 Hallar los términos 20 y 310 de la progresión $-43, -40, -37, \ldots$.

Problema 1.3 Hallar los términos 12 y 1090 de la progresión $0.6, 1.2, 1.8, \ldots$.

Problema 1.4 Hallar los términos 13 y 150 de la progresión $a-2d, a-d, a, \ldots$.

Problema 1.5 Hallar los términos 10 y 51 de la progresión $x-y, x+y, x+3y, \ldots$.

Problema 1.6 Sumar $64, 96, 128, \ldots$ hasta cuarenta términos.

Problema 1.7 Sumar $1/2, 1/2-x, 1/2-2x, \ldots$ hasta treinta términos.

Problema 1.8 Sumar $x-y, x+y, x+3y, \ldots$ hasta diez términos.

Problema 1.9 Hallar el término 15 de una progresión aritmética cuyo término 14 es 9 y cuyo término 16 es -90.

Problema 1.10 Hallar el término 22 de una progresión aritmética cuyo término 11 es -1 y cuyo término 16 es 55.

Problema 1.11 Hallar el número de términos y la diferencia común de una serie aritmética cuya suma es 30, cuyo primer término es -9 y cuyo último término es 14.

Problema 1.12 Sumar

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$$

Problema 1.13 Demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n^2 - 1) + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

Problema 1.14 Demostrar que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

Problema 1.15 (AHSME 1994) Sumar la serie

$$20 + 20\frac{1}{5} + 20\frac{2}{5} + \cdots + 40.$$

Respuesta: 3030

Problema 1.16 (AIME 1984) Hallar el valor de $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{98}$ si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una progresión aritmética con diferencia común 1 y con $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{98} = 137$.

Respuesta: 93

Problema 1.17 Demostrar que

$$\frac{1}{1996} + \frac{2}{1996} + \frac{3}{1996} + \cdots + \frac{1995}{1996}$$

es un entero.

Problema 1.18 (AHSME 1991) Sea $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ y

$$P_n = \frac{T_2}{T_2 - 1} \cdot \frac{T_3}{T_3 - 1} \cdot \frac{T_4}{T_4 - 1} \cdots \frac{T_n}{T_n - 1}.$$

Hallar P_{1991}.

Respuesta: $\frac{5973}{1993}$

Problema 1.19 Considere la tabla:

$$1 = 1$$

$$2 + 3 + 4 = 1 + 8$$

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$$

$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 27 + 64$$

Descubra el patrón de formación, conjeture una ley general y demuéstrela.

Problema 1.20 Los enteros naturales impares se agrupan en paréntesis de la siguiente manera:

$$(1)$$
$$(3, 5)$$
$$(7, 9, 11)$$
$$(13, 15, 17, 19)$$
$$(21, 23, 25, 27, 29)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Halle la suma del sexto, séptimo, y octavo grupos. Conjeture y demuestre una fórmula para la suma del enésimo paréntesis.

Capítulo 2

Progresiones geométricas

Consideremos ahora la progresión $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$. Notamos que cada término es el triple del anterior. Una progresión de este tipo se llama *progresión geométrica.* Decimos que 3 es la *razón común* de esta progresión geométrica. Vemos que el primer término está dado por $2(3)^0$, el segundo por $2(3)^1$, el tercero por $2(3)^2$, el cuarto por $2(3)^3$, el quinto por $2(3)^4$, etc. Así pues, el cincuentavo término está dado por $2(3)^{49}$, el 100-avo es $2(3)^{99}$ y el enésimo término está dado por $2(3)^{n-1}$.

Ejemplo 2.0.7 Hallar el décimo término de la progresión geométrica

$$1/2, -1, 2, \ldots.$$

Solución: Vemos que la razón común es -2. Luego el primer término está dado por $\frac{1}{2}(-2)^0$, el segundo está dado por $\frac{1}{2}(-2)^1$, el tercero por $\frac{1}{2}(-2)^2$, el cuarto por $\frac{1}{2}(-2)^3$, etc. El patrón indica pues que el décimo término está dado por $\frac{1}{2}(-2)^9$.

En general si una progresión geométrica tiene primer término a y razón común r, entonces va de la siguiente manera: $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ y el enésimo término está dado por ar^{n-1}.

Ejemplo 2.0.8 Hallar el segundo término de una progresión geométrica con cuarto término 24 y séptimo término 192.

Solución: No conocemos el primer término, llamémosle a. Tampoco conocemos la razón común, llamémosle r. Luego el primer término está dado por a, el segundo por ar, el tercero por ar^2, el cuarto por ar^3 y siguiendo el patrón, el séptimo término es ar^6. La data es que $24 = ar^3$ y $192 = ar^6$. De aquí tenemos

$$r^3 = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{192}{24} = 8,$$

de donde $r = 2$. Luego $a(2)^3 = 24$ y así $a = 3$. Luego el segundo término está dado por $ar = 6$.

Ejemplo 2.0.9 Hallar la suma de la serie geométrica

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 1024.$$

Solución: Pongamos

$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 1024.$$

Entonces

$$2S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024 + 2048.$$

Así

$$S = 2S - S = (2+4+8\cdots+2048) - (1+2+4+\cdots+1024) = 2048 - 1 = 2047.$$

Ejemplo 2.0.10 Hallar la suma de la serie geométrica

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{99}}.$$

Solución: Tenemos

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{100}}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}x &= x - \tfrac{1}{3}x \\ &= (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{3^3} + \cdots + \tfrac{1}{3^{99}}) \\ &\qquad -(\tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{3^3} + \cdots + \tfrac{1}{3^{99}} + \tfrac{1}{3^{100}}) \\ &= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3^{100}}. \end{aligned}$$

De esto colegimos

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{99}}.$$

Ejemplo 2.0.11 Sumar

$$a = 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + 10 \cdot 4^9.$$

Solución: Tenemos

$$4a = 4 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \cdots + 9 \cdot 4^9 + 10 \cdot 4^{10}.$$

Luego $4a - a$ nos da

$$3a = -1 - 4 - 4^2 - 4^3 - \cdots - 4^9 + 10 \cdot 4^{10}.$$

Al sumar esta última serie geométrica,

$$a = \frac{10 \cdot 4^{10}}{3} - \frac{4^{10} - 1}{9}.$$

Ejemplo 2.0.12 Hallar la suma

$$S_n = 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n.$$

Interpretar el resultado cuando n crece indefinidamente.

Solución: Tenemos

$$S_n - \frac{1}{2} S_n = (1+1/2+1/4+\cdots+1/2^n) - (1/2+1/4+\cdots+1/2^n+1/2^{n+1}) = 1 - 1/2^n.$$

Así

$$S_n = 2 - 1/2^n.$$

Calculamos ahora los siguientes valores:

$$\begin{array}{lll} S_1 & = 2 - 1/2^0 & = & 1 \\ S_2 & = 2 - 1/2 & = & 1.5 \\ S_3 & = 2 - 1/2^2 & = & 1.875 \\ S_4 & = 2 - 1/2^3 & = & 1.875 \\ S_5 & = 2 - 1/2^4 & = & 1.9375 \\ S_6 & = 2 - 1/2^5 & = & 1.96875 \\ S_{10} & = 2 - 1/2^9 & = & 1.998046875 \end{array}$$

Vemos que a medida que tomamos más términos de la serie, nos acercamos cada vez más a 2.

Supongamos que los procedimientos que utilizamos para sumar series geométricas finitas son válidos para las infinitas. Entonces podremos decir que

$$S_\infty = 1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \cdots$$

hasta infinitos suma a 2, ya que

$$S_\infty - \frac{1}{2} S_\infty = (1+1/2+1/2^2+1/2^3+\cdots) - (1/2+1/2^2+1/2^3+1/2^4+\cdots)) = 1$$

puesto que los términos luego del primero encuentran su opuesto en la serie de la derecha.

La manipulación formal que utilizamos supra debe manejarse con sumo cuidado. Por ejemplo,

$$S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$$

es obviamente infinitamente grande, pues cada término es mayor que 1 y esto incrementa el valor de la serie cada vez más. Sin embargo, al operar formalmente como lo hicimos anteriormente obtenemos

$$S = 2S - S = (2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots) - (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots) = -2,$$

i.e., la suma de números positivos da un resultado negativo, lo cual es un disparate mayúsculo.

¿Qué sucede entonces? Entra ahora pues el concepto de *convergencia.* Diremos que la serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + \cdots$$

converge hacia un valor finito S si cada suma parcial

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

se acerca más y más a S a medida que n aumenta. Como vimos en los ejemplos anteriores, esto sucederá cuando $|r| < 1$. Si las sumas parciales no se acercan a un valor finito definitivo cuando n aumenta, entonces decimos que la serie geométrica *diverge.* Del ejemplo anterior se vislumbra que esto sucede cuando $|r| \geq 1$.

La teoría de series geométricas convergentes puede utilizarse para convertir un decimal periódico a una fracción.

Ejemplo 2.0.13 Hallar la fracción que representa

$$x = 0.122222222222222\ldots$$

Solución: Observemos que

$$x = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots .$$

Pero

$$S = \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}.$$

Así

$$0.1222222222\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{45} = \frac{11}{90}.$$

Ejemplo 2.0.14 Hallar la fracción que representa

$$x = 1.304040404040\ldots.$$

Solución: Tenemos

$$x = 1 + \frac{30}{10^2} + \frac{40}{10^4} + \frac{40}{10^6} + \frac{40}{10^8} + \cdots .$$

Ahora bien, la serie geométrica infinita

$$S = \frac{40}{10^4} + \frac{40}{10^6} + \frac{40}{10^8} + \cdots$$

suma a

$$S = \frac{40}{9900} = \frac{2}{495}.$$

Así

$$x = 1 + \frac{30}{10^2} + \frac{2}{495} = \frac{1291}{990}.$$

Ejemplo 2.0.15 Una mosca está en el origen $(0,0)$ y viaja sobre el plano una pulgada hacia el este, $1/2$ pulgada hacia el norte, $1/4$ de pulgada hacia el oeste, $1/8$ de pulgada hacia el sur, $1/16$ de pulgada hacia el este, etc. Si la mosca hiciese esto *ad infinitum*, ¿donde terminaría?

Solución: Sea (X, Y) el punto donde la mosca terminaría. Vemos que

$$X = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \cdots = \frac{4}{5}$$

y

$$Y = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{128} + \cdots = \frac{2}{5}.$$

Luego la mosca termina en el punto $(4/5, 2/5)$.

Problemas

Problema 2.1 Hallar los términos $13, 22$ y enésimo de la progresión geométrica

$$3/2, -3/8, 3/32, \ldots$$

Problema 2.2 Si el término 15 de una progresión geométrica es -100 y el término 20 es 125, hallar el segundo término.

Problema 2.3 Hallar la suma de las siguientes series geométricas:

1. $$1/2 - 1/4 + 1/8 - \cdots + 1/512 - 1/1024.$$

2. $$6 + 18 + 54 + \ldots$$

   hasta 20 términos.

3. $$1/10 + 1/100 + 1/1000 + \ldots$$

   hasta 10 términos.

Problema 2.4 Hallar la suma de la serie

$$3 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4^3 + \cdots + 99 \cdot 4^{48}.$$

Problema 2.5 1. ¿Qué valor tendrá

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$$

hasta infinito?

2. ¿Qué valor tendrá

$$1/10 + 1/10 + 1/100 + \cdots$$

hasta infinito?

3. ¿Qué valor tendrá

$$9/10 + 9/100 + 9/1000 + \cdots$$

hasta infinito? Discuta por qué

$$1 = 0.9999999999999999999\ldots$$

4. ¿Qué valor tendrá

$$1 + 1 + 1 + \cdots$$

hasta infinito? Discuta.

5. ¿Qué valor tendrá

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

hasta infinito?

Problema 2.6 Hallar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Problema 2.7 Hallar todos los números complejos x, y tales que $x, x+2y, 2x+y$ formen una progresión aritmética a la vez que $(y+1)^2, xy+5, (x+1)^2$ formen una progresión geométrica.

Problema 2.8 Los lados de un triángulo rectángulo forman una progresión geométrica. Halle las tangentes de los ángulos agudos.

Problema 2.9 Sean a, b las raíces de la ecuación $x^2 - 3x + A = 0$ y sean c, d las raíces de la ecuación $x^2 - 12x + B = 0$. Se sabe que a, b, c, d forman, en este orden, una progresión geométrica creciente. Halle A y B.

Problema 2.10 Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forman una progresión geométrica. Si

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n; \quad T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n},$$

hallar su producto $P = a_1 a_2 \cdots a_n$ en términos de s y T.

Capítulo 3

Cancelación telescópica

A veces podemos sumar una serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

si podemos encontrar una sucesión $\{v_k\}$ con $a_k = v_k - v_{k-1}$. Entonces

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = v_1-v_0+v_2-v_1+\cdots+v_{n-1}-v_{n-2}+v_n-v_{n-1} = v_n-v_0.$$

Si tal sucesión $\{v_k\}$ existe, diremos entonces que la serie $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ es una *serie teléscopica.*

Ejemplo 3.0.16 Simplificar

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{99}\right).$$

Solución: Sumando cada fracción tenemos:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{100}{99},$$

lo que simplifica a $100/2 = 50$.

Ejemplo 3.0.17 Dado que

$$(\log_2 3)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_4 5)\cdots(\log_{511} 512)$$

es un entero, hállelo.

Solución: Poniendo todo en una base común, digamos $a > 0, a \neq 1$:

$$(\log_2 3)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_4 5)\cdots(\log_{511} 512) = \frac{\log_a 3}{\log_a 2}\cdot\frac{\log_a 4}{\log_a 3}\cdot\frac{\log_a 5}{\log_a 4}\cdots\frac{\log_a 512}{\log_a 511} = \frac{\log_a 512}{\log_a 2}.$$

Pero

$$\frac{\log_a 512}{\log_a 2} = \log_2 512 = \log_2 2^9 = 9,$$

de donde obtenemos el resultado.

Ejemplo 3.0.18 Simplificar

$$(2+1)\cdot\left(2^2+1\right)\cdot\left(2^{2^2}+1\right)\cdot\left(2^{2^3}+1\right)\cdots\left(2^{2^{99}}+1\right).$$

Solución: Utilizando la identidad $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ y llamando P al producto:

$$\begin{aligned}
(2-1)P &= (2-1)(2+1)\cdot\left(2^2+1\right)\cdot\left(2^{2^2}+1\right)\cdot\left(2^{2^3}+1\right)\cdots\left(2^{2^{99}}+1\right)\\
&= \left(2^2-1\right)\cdot\left(2^2+1\right)\cdot\left(2^{2^2}+1\right)\cdot\left(2^{2^3}+1\right)\cdots\left(2^{2^{99}}+1\right)\\
&= \left(2^{2^2}-1\right)\cdot\left(2^{2^2}+1\right)\cdot\left(2^{2^3}+1\right)\cdots\left(2^{2^{99}}+1\right)\\
&= \left(2^{2^3}-1\right)\cdot\left(2^{2^3}+1\right)\cdot\left(2^{2^4}+1\right)\cdots\left(2^{2^{99}}+1\right)\\
&\vdots\\
&= (2^{2^{99}}-1)(2^{2^{99}}+1)\\
&= 2^{2^{100}}-1,
\end{aligned}$$

de donde

$$P = 2^{2^{100}} - 1.$$

Ejemplo 3.0.19 Simplificar

$$S = \log\tan 1^\circ + \log\tan 2^\circ + \log\tan 3^\circ + \cdots + \log\tan 89^\circ.$$

Solución: Observe que $(90-k)^\circ + k^\circ = 90^\circ$. Luego, sumando el término k-ésimo con el $90-k$-ésimo obtenemos que la suma dada es

$$\begin{aligned}
S &= \log(\tan 1^\circ)(\tan 89^\circ) + \log(\tan 2^\circ)(\tan 88^\circ)\\
&\quad + \log(\tan 3^\circ)(\tan 87^\circ) + \cdots + \log(\tan 44^\circ)(\tan 46^\circ) + \log\tan 45^\circ.
\end{aligned}$$

Como $\tan k^\circ = 1/\tan(90-k)^\circ$, tenemos

$$S = \log 1 + \log 1 + \cdots + \log 1 + \log \tan 45^\circ.$$

Finalmente, como $\tan 45^\circ = 1$, colegimos

$$S = \log 1 + \log 1 + \cdots + \log 1 = 0.$$

Ejemplo 3.0.20 Hallar el valor exacto del producto

$$P = \cos\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7}.$$

Solución: Multiplicando a uno y otro lado por $\sin\frac{\pi}{7}$ y haciendo uso de la identidad $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{7}P &= (\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}) \cdot \cos\frac{2\pi}{7} \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \\
&= \frac{1}{2}(\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}) \cdot \cos\frac{4\pi}{7} \\
&= \frac{1}{4}(\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}) \\
&= \frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{7}.
\end{aligned}$$

Como $\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{8\pi}{7}$, deducimos que

$$P = -\frac{1}{8}.$$

Ejemplo 3.0.21 Demostrar que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{9999}{10000} < \frac{1}{100}.$$

Solución: Pongamos

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{9999}{10000}$$

y

$$B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{10000}{10001}.$$

Es claro que $x^2 - 1 < x^2$ para todo número real x. De esto deducimos

$$\frac{x-1}{x} < \frac{x}{x+1}.$$

Por tanto

$$\begin{array}{ccc} 1/2 & < & 2/3 \\ 3/4 & < & 4/5 \\ 5/6 & < & 6/7 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 9999/10000 & < & 10000/10001 \end{array}$$

Como todas estas desigualdades son de números positivos, podemos multiplicar una y otra columna para obtener

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{9999}{10000} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{10000}{10001},$$

o $A < B$. Luego $A^2 = A \cdot A < A \cdot B$. Pero entrelazando los factores de A y B,

$$A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{9999}{10000} \cdot \frac{10000}{10001} = \frac{1}{10001},$$

y por consiguiente, $A^2 < A \cdot B = 1/10001$. De aquí $A < 1/\sqrt{10001} < 1/100$.

Para nuestro siguiente ejemplo necesitaremos la siguiente definición. El símbolo $n!$ (léase n *factorial*) significa

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Por ejemplo $1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Observe que $(k+1)! = (k+1)k!$. Tendremos por convención $0! = 1$.

Ejemplo 3.0.22 Sumar

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99!.$$

Solución: De $(k+1)! = (k+1)k! = k \cdot k! + k!$ deducimos $(k+1)! - k! = k \cdot k!$. Así

$$\begin{array}{lcl} 1 \cdot 1! & = & 2! - 1! \\ 2 \cdot 2! & = & 3! - 2! \\ 3 \cdot 3! & = & 4! - 3! \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 98 \cdot 98 & = & 99! - 98! \\ 99 \cdot 99! & = & 100! - 99! \end{array}$$

Sumando una y otra columna,

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! = 100! - 1! = 100! - 1.$$

Ejemplo 3.0.23 Hallar una forma cerrada para la suma

$$A_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Solución: Observemos que

$$k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1.$$

Luego

$$\begin{array}{lcl} 1^2 - 0^2 & = & 2 \cdot 1 - 1 \\ 2^2 - 1^2 & = & 2 \cdot 2 - 1 \\ 3^2 - 2^2 & = & 2 \cdot 3 - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2 - (n-1)^2 & = & 2 \cdot n - 1 \end{array}$$

Sumando una y otra columna,

$$n^2 - 0^2 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n.$$

Resolviendo para la suma,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \cdot n^2/2 + n/2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejemplo 3.0.24 Hallar la suma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Solución: Observemos que

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1.$$

Luego

$$\begin{array}{lcl} 1^3 - 0^3 & = & 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \\ 2^3 - 1^3 & = & 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\ 3^3 - 2^3 & = & 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n^3 - (n-1)^3 & = & 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1 \end{array}$$

Sumando una y otra columna,

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n.$$

Pero por el ejercicio anterior se tiene

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - \frac{3}{2} \cdot n(n+1) + n.$$

Resolviendo para la suma,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot n(n+1) - \frac{n}{3}.$$

Simplificando obtenemos

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ejemplo 3.0.25 Sumar la serie

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

Solución: Observe que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Luego

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{1\cdot 2} & = & \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2\cdot 3} & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3\cdot 4} & = & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{99\cdot 100} & = & \frac{1}{99} - \frac{1}{100}
\end{array}$$

Sumando una y otra columna obtenemos

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

Ejemplo 3.0.26 Sumar

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{31 \cdot 34}.$$

Solución: Observe que

$$\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+4}.$$

Luego

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{1\cdot 4} & = & \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \\
\frac{1}{4\cdot 7} & = & \frac{1}{12} - \frac{1}{21} \\
\frac{1}{7\cdot 10} & = & \frac{1}{21} - \frac{1}{30} \\
\frac{1}{10\cdot 13} & = & \frac{1}{30} - \frac{1}{39} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{34\cdot 37} & = & \frac{1}{102} - \frac{1}{111}
\end{array}$$

Sumando una y otra columna obtenemos

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{31\cdot 34} = \frac{1}{3} - \frac{1}{111} = \frac{12}{37}.$$

Ejemplo 3.0.27 Sumar

$$\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 7\cdot 10} + \frac{1}{7\cdot 10\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{25\cdot 28\cdot 31}.$$

Solución: Observe que

$$\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(3n+4)(3n+7)}.$$

Luego

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7} & = & \frac{1}{6\cdot 1\cdot 4} - \frac{1}{6\cdot 4\cdot 7} \\
\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10} & = & \frac{1}{6\cdot 4\cdot 7} - \frac{1}{6\cdot 7\cdot 10} \\
\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13} & = & \frac{1}{6\cdot 7\cdot 10} - \frac{1}{6\cdot 10\cdot 13} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{25\cdot 28\cdot 31} & = & \frac{1}{6\cdot 25\cdot 28} - \frac{1}{6\cdot 28\cdot 31}
\end{array}$$

Sumando una y otra columna obtenemos

$$\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 7\cdot 10} + \frac{1}{7\cdot 10\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{25\cdot 28\cdot 31} = \frac{1}{6\cdot 1\cdot 4} - \frac{1}{6\cdot 28\cdot 31} = \frac{9}{217}.$$

Ejemplo 3.0.28 Sumar

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + 99\cdot 100.$$

Solución: Observemos que

$$k(k+1) = \frac{1}{3}(k)(k+1)(k+2) - \frac{1}{3}(k-1)(k)(k+1).$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{lcl} 1\cdot 2 & = & \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 0\cdot 1\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & = & \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & = & \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 4\cdot 5 - \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 99\cdot 100 & = & \frac{1}{3}\cdot 99\cdot 100\cdot 101 - \frac{1}{3}\cdot 98\cdot 99\cdot 100 \end{array}$$

Sumando una y otra columna,

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + 99\cdot 100 = \frac{1}{3}\cdot 99\cdot 100\cdot 101 - \frac{1}{3}\cdot 0\cdot 1\cdot 2 = 333300.$$

Problemas

Problema 3.1 Hallar una fórmula para

$$D_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n.$$

Problema 3.2 Simplificar

$$\frac{(1+i)^{2004}}{(1-i)^{2000}}.$$

Respuesta: -4

Problema 3.3 Si

$$a + ib = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + 1995i^{1994} + 1996i^{1995},$$

con a y b números reales, hallar a y b.

Respuesta: $a = -998 = b$.

Problema 3.4 Simplificar

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{99^2}\right).$$

Respuesta: 2400.

Problema 3.5 Simplificar

$$\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{3}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\log_2\left(1+\frac{1}{1023}\right).$$

Respuesta: 9.

Problema 3.6 Hallar el valor exacto de

$$\frac{1}{\log_2 1996!}+\frac{1}{\log_3 1996!}+\frac{1}{\log_4 1996!}+\cdots+\frac{1}{\log_{1996} 1996!}.$$

Respuesta: 1.

Problema 3.7 (AHSME 1996) La sucesión

$$1,2,1,2,2,1,2,2,2,1,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2,1,2,\ldots$$

consiste de 1's separados por bloques de 2's, con n bloques de 2's en el n-ésimo bloque. Hallar la suma de los primeros 1234 términos de esta sucesión.

Problema 3.8 (AIME 1985) Calcular el producto $x_1x_2\cdots x_8$ si $x_1 = 97$ y $x_n = n/x_{n-1}, n > 1$.

Respuesta: 384

Problema 3.9 (AIME 1993) Durante una campaña política reciente, un candidato hizo una trayectoria que presumimos yace en el plano. En el primer día él viajó hacia el este, en el segundo, él viajó hacia el norte, en el tercero hacia el oeste, en el cuarto hacia el sur, en el quinto hacia el este, etc. Si el candidato viajó $n^2/2$ millas en el n-ésimo día, ¿a cuantas millas estaba él de su punto de partida en el 40avo día?

Respuesta: 580

Problema 3.10 Demostrar que

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Problema 3.11 Simplificar

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdots\frac{100^3-1}{100^3+1}.$$

Pista: $x^3 \pm 1 = (x \pm 1)(x^2 \mp x + 1)$

Problema 3.12 Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números arbitrarios. Demostrar que

$$\begin{aligned} a_1 + a_2(1+a_1) + a_3(1+a_1)(1+a_2) + a_4(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \\ + \cdots + a_{n-1}(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_{n-2}) \\ = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n) - 1. \end{aligned}$$

Problema 3.13 Demostrar que

$$\csc 2 + \csc 4 + \csc 8 + \cdots + \csc 2^n = \cot 1 - \cot 2^n.$$

Pista: Demuestre primero que $\csc 2x = \cot x - \cot 2x$.

Problema 3.14 Sea $0 < x < 1$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}.$$

Pista: Observe que

$$\frac{y}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y^2}.$$

Problema 3.15 Demostrar que

$$\tan\frac{\pi}{2^{100}} + 2\tan\frac{\pi}{2^{99}} + 2^2\tan\frac{\pi}{2^{2^{98}}} + \cdots + 2^{98}\tan\frac{\pi}{2^2} = \cot\frac{\pi}{2^{100}}.$$

Problema 3.16 Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}.$$

Problema 3.17 Evalúe el radical

$$\left(\frac{1\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 8 + 3\cdot 6\cdot 12 + \cdots}{1\cdot 3\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 18 + 3\cdot 9\cdot 27 + \cdots}\right)^{1/3}.$$

Problema 3.18 Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{1+n+n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Pista: De la identidad

$$\tan x - \tan y = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

deduzca que

$$\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}.$$

Problema 3.19 Demostrar que

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999.$$

Pista: De la identidad

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}},$$

deduzca

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}.$$

Capítulo 4

Recursiones y ecuaciones funcionales

Veremos ahora métodos para hallar formas cerradas de ciertas recursiones. En general aplicaremos las técnicas de la sección anterior.

Ejemplo 4.0.29 Sea $x_0 = 7$ y $x_n = 2x_{n-1}, n \geq 1$. Hallar una fórmula cerrada para x_n.

Solución: Tenemos

$$\begin{array}{lcl} x_0 & = & 7 \\ x_1 & = & 2x_0 \\ x_2 & = & 2x_1 \\ x_3 & = & 2x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & 2x_{n-1} \end{array}$$

Multiplicando una y otra columna,

$$x_0 x_1 \cdots x_n = 7 \cdot 2^n x_1 x_2 \cdots x_{n-1}.$$

Cancelando factores comunes,

$$x_n = 7 \cdot 2^n.$$

Ejemplo 4.0.30 Sea $x_0 = 7$ y $x_n = x_{n-1} + n, n \geq 1$. Hallar una fórmula cerrada para x_n.

Solución: Tenemos

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 7 \\ x_1 & = & x_0 + 1 \\ x_2 & = & x_1 + 2 \\ x_3 & = & x_2 + 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & x_{n-1} + n \end{array}$$

Sumando una y otra columna,

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 7 + x_0 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + (1 + 2 + 3 + \cdots + n).$$

Cancelando y simplificando,

$$x_n = 7 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejemplo 4.0.31 Sea $x_0 = 7$ y $x_n = 2x_{n-1} + 1, n \geq 1$. Hallar una fórmula cerrada para x_n.

Solución: Tenemos

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 7 \\ x_1 & = & 2x_0 + 1 \\ x_2 & = & 2x_1 + 1 \\ x_3 & = & 2x_2 + 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & = & 2x_{n-2} + 1 \\ x_n & = & 2x_{n-1} + 1 \end{array}$$

Aquí no nos funcionan los métodos anteriores, así que nos valdremos del siguiente artificio. Multipliquemos a la k-ésima fila por 2^{n-k}, obteniendo

$$\begin{array}{rcl} 2^n x_0 & = & 2^n \cdot 7 \\ 2^{n-1} x_1 & = & 2^n x_0 + 2^{n-1} \\ 2^{n-2} x_2 & = & 2^{n-1} x_1 + 2^{n-2} \\ 2^{n-3} x_3 & = & 2^{n-2} x_2 + 2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^2 x_{n-2} & = & 2^3 x_{n-3} + 2^2 \\ 2x_{n-1} & = & 2^2 x_{n-2} + 2 \\ x_n & = & 2x_{n-1} + 1 \end{array}$$

Sumando una y otra columna y cancelando,

$$x_n = 7 \cdot 2^n + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) = 7 \cdot 2^n + 2^n - 1 = 2^{n+3} - 1.$$

Aliter: Pongamos $u_n = x_n + 1 = 2x_{n-1} + 2 = 2(x_{n-1} + 1) = 2u_{n-1}$. Luego la recursión $u_n = 2u_{n-1}$ la resolvemos como en nuestro primer ejemplo, obteniendo de esta forma $u_n = 2^n u_0 = 2^n(x_0 + 1) = 2^n \cdot 8 = 2^{n+3}$. Finalmente $x_n = u_n - 1 = 2^{n+3} - 1$.

Ejemplo 4.0.32 Una sucesión satisface $u_0 = 3, u_{n+1}^2 = u_n, n \geq 1$. Halle una forma cerrada para ella.

Solución: Pongamos $v_n = \log u_n$. Entonces $v_n = \log u_n = \log u_{n-1}^{1/2} = \frac{1}{2} \log u_{n-1} = \frac{v_{n-1}}{2}$. Como $v_n = v_{n-1}/2$, tenemos $v_n = v_0/2^n$, o sea, $\log u_n = (\log u_0)/2^n$. Luego $u_n = 3^{1/2^n}$.

Ejemplo 4.0.33 Halle una forma cerrada para

$$a_0 = 5, a_{j+1} = a_j^2 + 2a_j, j \geq 0.$$

Solución: Tenemos

$$a_{j+1} + 1 = a_j^2 + 2a_j + 1 = (a_j + 1)^2.$$

Pongamos $v_{j+1} = a_{j+1} + 1$. Entonces $v_{j+1} = a_{j+1} + 1 = (a_j + 1)^2 = v_j^2$. De aquí $v_{j+1} = v_0^{2^j}$, o sea

$$a_{j+1} = v_{j+1} - 1 = v_0^{2^j} - 1 = (a_0 + 1)^{2^j} - 1 = 6^{2^j} - 1.$$

Ejemplo 4.0.34 Una escalera tiene n escalones. Un duende puede subir la escalera de escalón en escalón o saltándose un escalón. Hallar una recursión para el número de maneras en que el duende puede subir la escalera.

Solución: Sea u_n el número de maneras en que puede el duende subir una escalera de n escalones. El duende puede llegar al último escalón o bien desde el penúltimo o bien desde el antepenúltimo escalón. Luego

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Es claro que $u_1 = 1, u_2 = 2$.

Ejemplo 4.0.35 Si $f(x) = f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ y $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ para $n > 0$, hallar $f_{1996}(-1/3)$.

Solución: Observe que

$$f_1(x) = f(f_0(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x},$$

$$f_2(x) = f(f_1(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$$

y

$$f_3(x) = \frac{1}{1-x} = f_0(x).$$

Luego esta recursión es cíclica de orden 3. Esto implica que

$$f_0(x) = f_3(x) = f_6(x) = \cdots,$$

$$f_1(x) = f_4(x) = f_7(x) = \cdots$$

y

$$f_2(x) = f_5(x) = f_8(x) = \cdots.$$

Como $1996 = 1995 + 1$ deja residuo 1 al ser dividido por 3,

$$f_{1996}(-1/3) = f_1(-1/3) = 4.$$

Ejemplo 4.0.36 Hallar todas las funciones que satisfacen

$$f(x+y) + f(x-y) = 4x^2 + 4y^2.$$

Solución: Tomando $y = 0$, obtenemos $f(x) + f(x) = 4x^2$ o $f(x) = 2x^2$. Veamos que $f(x) = 2x^2$ satisface la ecuación funcional:

$$f(x+y)+f(x-y) = 2(x+y)^2+2(x-y)^2 = 2x^2+4xy+2y^2+2x^2-4xy+2y^2 = 4x^2+4y^2.$$

Ejemplo 4.0.37 (AHSME 1979) La función f satisface

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - xy + 1$$

para todos los números reales x, y. Si $f(1) = 1$, hallar todos los enteros $n \neq 1$ tales que $f(n) = n$.

Ejemplo 4.0.38 (AHSME 1981) La función f no está definida para $x = 0$, pero si $x \neq 0$ satisface

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x.$$

¿Para cuántos valores de x se cumple $f(x) = f(-x)$?

Problemas

Problema 4.1 Sea $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, n > 0$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = 1.$$

Problema 4.2 (AIME 1994) La función f tiene la propiedad que para todo número real x,

$$f(x) + f(x-1) = x^2.$$

Si $f(19) = 94$, hallar el residuo cuando $f(94)$ se divide por 1000.

Problema 4.3 Hallar una forma cerrada para

$$x_0 = -1;\ x_n = x_{n-1} + n^2, n > 0.$$

Problema 4.4 Sea $f(x) = f_0(x) = \sqrt{1 - x^{-2}}, f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), n > 0$. Hallar $f_{99}(4)$.

Problema 4.5 Sea f una función con las siguientes propiedades:
1) $f(n)$ está definida para todo entero positivo n;
2) $f(n)$ es un entero;
3) $f(2) = 2$;
4) $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo m y n;
5) $f(m) > f(n)$ si $m > n$.

Demostrar que $f(n) = n$.

Problema 4.6 Demostrar que existe una función f única del conjunto $\mathbf{R}^+$ de los reales positivos a $\mathbf{R}^+$ tal que

$$f(f(x)) = 6x - f(x), \quad f(x) > 0 \forall\ x > 0.$$

Problema 4.7 Si $u_0 = 1/3$ y $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$, hallar una fórmula para u_n.

Pista: Poner $u_n = \cos v_n$.

Problema 4.8 Una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ satisface $a_1 = 2$ y

$$a_{m+n} = 4^{mn} a_m a_n \quad \forall m, n.$$

Hallar el valor mínimo de n para el cual a_n tiene al menos 3000 dígitos.

Problema 4.9 Sea k un entero no-negativo fijo y supóngase que

$$f(2x) = 2^{k-1} \left(f(x) + f(x + \frac{1}{2}) \right).$$

Demuéstrese que

$$f(3x) = 3^{k-1} \left(f(x) + f(x + \frac{1}{3}) + f(x + \frac{2}{3}) \right).$$

Problema 4.10 Hallar todas las funciones f que satisfacen

$$f(x)^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x.$$

Respuesta: $f(x) = 4x^{2/3} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/3}$.

Capítulo 5

Ecuaciones

A continuación veremos como resolver algunas ecuaciones. La mayoría de ellas son ecuaciones cuadráticas disfrazadas.

Para resolver ecuaciones cuadráticas, el método más eficiente es quizás la compleción del cuadrado. Ésta es preferible a la fórmula cuadrática ya que crea "malicia" para identificar patrones. Por ejemplo, para resolver

$$x^2 - 6x + 3 = 0,$$

escribimos

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 6x + 3 & = & x^2 - 6x + 9 - 6 \\ & = & (x-3)^2 - (\sqrt{6})^2 \\ & = & (x - 3 + \sqrt{6})(x - 3 - \sqrt{6}). \end{array}$$

De aquí $x = 3 \pm \sqrt{6}$. De manera semejante, para resolver $2x^2 + 6x + 5 = 0$ escribimos

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 + 6x + 5 & = & 2x^2 + 6x + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \\ & = & (\sqrt{2}x + \frac{3}{\sqrt{2}})^2 - (i\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \\ & = & (\sqrt{2}x + \frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}x + \frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}). \end{array}$$

Luego, $x = -\frac{3}{2} \pm i\frac{1}{2}$.

Ejemplo 5.0.39 Resolver

$$9 + x^{-4} = 10x^{-2}.$$

Solución: Observe que

$$x^{-4} - 10x^{-2} + 9 = (x^{-2} - 9)(x^{-2} - 1).$$

Luego $x = \pm\frac{1}{3}$ y $x = \pm 1$.

Ejemplo 5.0.40 Resolver

$$9^x - 3^{x+1} - 4 = 0.$$

Solución: Observe que $9^x - 3^{x+1} - 4 = (3^x - 4)(3^x + 1)$. Como no existe ningún número real con $3^x + 1 = 0$, este factor se descarta. Así $3^x - 4 = 0$ nos da $x = \log_3 4$.

Ejemplo 5.0.41 Resolver

$$(x - 5)(x - 7)(x + 6)(x + 4) = 504.$$

Solución: Reordenemos los factores y multipliquemos para obtener

$$(x-5)(x-7)(x+6)(x+4) = (x-5)(x+4)(x-7)(x+6) = (x^2-x-20)(x^2-x-42).$$

Pongamos $y = x^2 - x$. Así $(y - 20)(y - 42) = 504$ o $y^2 - 62y + 336 = (y - 6)(y - 56) = 0$. Luego $y = 6,\ 56$, lo que implica

$$x^2 - x = 6$$

y

$$x^2 - x = 56.$$

De aquí $x = -2, 4, -7, 8$.

Ejemplo 5.0.42 Resolver

$$12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0.$$

Solución: Reordenando

$$12x^4 + 12 - 56(x^3 + x) + 89x^2 = 0. \tag{5.1}$$

Dividiendo por x^2,

$$12(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 56(x + \frac{1}{x}) + 89 = 0.$$

Pongamos $u = x+1/x$. Luego $u^2-2 = x^2+1/x^2$. Usando esto, (1) se convierte $12(u^2-2) - 56u + 89 = 0$, de donde $u = 5/2,\ 13/6$. Por lo tanto

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

y

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}.$$

Concluimos que $x = 1/2, 2, 2/3, 3/2$.

Ejemplo 5.0.43 Hallar las soluciones reales de

$$x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 12.$$

Solución: Observe que

$$x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} - 15 = 0.$$

Poniendo $u = x^2-5x+3$ obtenemos $u+2u^{1/2}-15 = (u^{1/2}+5)(u^{1/2}-3) = 0$. Luego $u = 9$ (descartamos $u^{1/2}+5 = 0$, ¿por qué?). Por lo tanto $x^2-5x+3 = 9$ o $x = -1,\ 6$.

Ejemplo 5.0.44 Resolver

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} - \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 9. \tag{5.2}$$

Solución: Tenemos idénticamente

$$(3x^2 - 4x + 34) - (3x^2 - 4x - 11) = 45. \tag{5.3}$$

Dividiendo cada miembro de (3) por los miembros correspondientes de (2) obtenemos

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} + \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 5. \tag{5.4}$$

Sumando (2) y (4)

$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} = 7,$$

de donde $x = -\frac{5}{3}, 3$.

Ejemplo 5.0.45 Resolver la ecuación

$$\sqrt[3]{14+x}+\sqrt[3]{14-x}=4.$$

Solución: Póngase $u=\sqrt[3]{14+x}, v=\sqrt[3]{14-x}$. Entonces

$$64=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=14+x+14-x+12(196-x^2)^{1/3},$$

de donde

$$3=(196-x^2)^{1/3},$$

que al resolver nos da $x=\pm 13$.

Ejemplo 5.0.46 Halle el valor exacto de $\cos 2\pi/5$.

Solución: Usando la identidad

$$\cos(u\pm v)=\cos u\cos v\mp\sin u\sin v$$

par de veces obtenemos

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1 \tag{5.5}$$

y

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta. \tag{5.6}$$

Pongamos $x=\cos 2\pi/5$. Como $\cos 6\pi/5=\cos 4\pi/5$, gracias a las dos identidades (5) y (6), vemos que x satisface la ecuación

$$4x^3-2x^2-3x+1=0,$$

o sea,

$$(x-1)(4x^2+2x-1)=0.$$

Como $x=\cos 2\pi/5\neq 1$, y $\cos 2\pi/5>0$, x es la raíz positiva de la ecuación cuadrática $4x^2+2x-1=0$, es decir

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ejemplo 5.0.47 ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación

$$\sin x=\frac{x}{100}?$$

Solución: Vemos que $x = 0$ es una solución. Además si $x > 0$ es una solución, $-x < 0$ lo es también. Así pues, sólo contaremos las soluciones positivas.

Para que x sea una solución, se debe tener $|x| = 100|\sin x| \leq 100$. Por lo tanto podemos restrinjir x al intervalo $(0, 100]$. Dividamos este intervalo en subintervalos de longitud 2π (con un último intervalo más corto):

$$(0, 100] = (0, 2\pi] \cup (2\pi, 4\pi] \cup (4\pi, 6\pi] \cup \cdots \cup (28\pi, 30\pi] \cup (30\pi, 100].$$

De las gráficas de $y = \sin x, y = x/100$ vemos que en el intervalo $(0, 2\pi]$ existe sólo una solución. En cada intervalo de la forma $(2\pi k,\ 2(k+1)\pi], k = 1, 2, \ldots, 14$ existen dos soluciones. El intervalo $(30\pi, 100]$ tiene una onda completa de longitud π (ya que $31\pi < 100$) en la cual hay dos soluciones. Por consiguiente existen $1 + 2 \cdot 14 + 2 = 31$ Así pues, hay 31 soluciones positivas y por ende 31 soluciones negativas. Como 0 es también una solución, el total de soluciones reales es por lo tanto $31 + 31 + 1 = 63$.

Ejemplo 5.0.48 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + u &= 4, \\ y + u + v &= -5, \\ u + v + x &= 0, \\ v + x + y &= -8. \end{aligned}$$

Solución: Sumando las cuatro ecuaciones y diviendo por 3,

$$x + y + u + v = -3.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} 4 + v &= -3, \\ -5 + x &= -3, \\ 0 + y &= -3, \\ -8 + u &= -3. \end{aligned}$$

De aquí $x = 2, y = -3, u = 5, v = -7$.

Ejemplo 5.0.49 Resolver el sistema de ecuaciones

$$(x + y)(x + z) = 30,$$

$$(y + z)(y + x) = 15,$$

$$(z + x)(z + y) = 18.$$

Solución: Pongamos $u = y + z, v = z + x, w = x + y$. Entonces el sistema se convierte en

$$vw = 30, \; wu = 15, \; uv = 18. \tag{5.7}$$

Multiplicando todas estas ecuaciones obtenemos $u^2v^2w^2 = 8100$, esto es, $uvw = \pm 90$. Combinando este resultado con cada una de estas ecuaciones en (7), obtenemos $u = 3, v = 6, w = 5$, o $u = -3, v = -6, w = -5$. Luego

$$\begin{array}{rcl} y+z &=& 3, \\ z+x &=& 6, \\ x+y &=& 5, \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{rcl} y+z &=& -3, \\ z+x &=& -6, \\ x+y &=& -5, \end{array}$$

de donde $x = 4, \; y = 1, \; z = 2$ o $x = -4, \; y = -1, \; z = -2$..

Problemas

Problema 5.1 Resolver

$$2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}.$$

Problema 5.2 Resuelva

$$(x-7)(x-3)(x+5)(x+1) = 1680.$$

Problema 5.3 Resuelva

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$$

Problema 5.4 Resolver la ecuación

$$|x-3|^{(x^2-8x+15)/(x-2)} = 1.$$

Problema 5.5 Resolver la ecuación

$$x^{0.5\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = 3^{\log_9 4}.$$

Problema 5.6 Resolver la ecuación

$$2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} = 7.$$

Pista: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Problema 5.7 Resolver la ecuación

$$\log_{1/3}\left(\cos x + \frac{\sqrt{5}}{6}\right) + \log_{1/3}\left(\cos x - \frac{\sqrt{5}}{6}\right) = 2.$$

Problema 5.8 ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación

$$\sin x = \ln x?$$

Problema 5.9 Resolver la ecuación

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2.$$

Problema 5.10 Hallar las raíces reales de

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Problema 5.11 Resolver la ecuación

$$6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0.$$

Problema 5.12 Una progresión geométrica de números reales satisface que la suma de sus primeros cuatro términos es 15 y la suma de los cuadrados de estos términos es 85. Hallar esta progresión.

Problema 5.13 Resolver la ecuación

$$x(2x+1)(x-2)(2x-3) = 63.$$

Problema 5.14 Hallar el valor de

$$\sqrt{30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 + 1}.$$

Problema 5.15 Si la ecuación

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$$

hiciere sentido, hallar el valor de x.

Problema 5.16 Si la ecuación

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\cdots}}}}=2$$

hiciere sentido, hallar el valor de x.

Problema 5.17 Resolver la ecuación

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=98.$$

Problema 5.18 Sean a,b, c constantes reales con $abc \neq 0$. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2-(y-z)^2&=a^2,\\ y^2-(z-x)^2&=b^2,\\ z^2-(x-y)^2&=c^2. \end{aligned}$$

Problema 5.19 Resolver el sistema

$$\begin{aligned} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z&=2,\\ \log_3 x+\log_9 y+\log_9 z&=2,\\ \log_4 x+\log_{16} y+\log_{16} z&=2. \end{aligned}$$

Problema 5.20 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x^3+3x^2y+y^3&=8,\\ 2x^3-2x^2y+xy^2&=1. \end{aligned}$$

Pista: Ponga $y=mx$ y divida las ecuaciones así obtenidas. Resuelva para m.

Problema 5.21 Encuentre una solución real para la ecuación

$$(x^2-9x-1)^{10}+99x^{10}=10x^9(x^2-1).$$

Pista: Escriba la ecuación como

$$(x^2-9x-1)^{10}-10x^9(x^2-9x-1)+9x^{10}=0.$$

Problema 5.22 Resolver el sistema de ecuaciones

$$x^2 - yz = 3,$$

$$y^2 - zx = 4,$$

$$z^2 - xy = 5.$$

Problema 5.23 Resolver el sistema

$$2x + y + z + u = -1$$

$$x + 2y + z + u = 12$$

$$x + y + 2z + u = 5$$

$$x + y + z + 2u = -1$$

Problema 5.24 Resolver el sistema de ecuaciones

$$x^2 + x + y = 8,$$

$$y^2 + 2xy + z = 168,$$

$$z^2 + 2yz + 2xz = 12480.$$

Problema 5.25 Hallar las raíces reales de la ecuación

$$\underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \cdots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}}}_{n \quad \text{radicales}} = x.$$

Problema 5.26 Resolver la ecuación

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots \, 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}} = x.$$

Aquí la expresión de la fracción se repite n veces.

Problema 5.27 Resolver el sistema

$$x + 2 + y + 3 + \sqrt{(x + 2)(y + 3)} = 39,$$

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (x + 2)(y + 3) = 741.$$

Pista: Ponga $u = x + 2, v = y + 3$. Divida una ecuación por la otra.

Problema 5.28 Resolver el sistema de ecuaciones

$$x^4 + y^4 = 82,$$

$$x - y = 2.$$

Pista: Ponga $u = x + y, v = x - y$.

Problema 5.29 Resolver el sistema de ecuaciones

$$x_1x_2 = 1,\ x_2x_3 = 2,\ \ldots,\ x_{100}x_{101} = 100,\ x_{101}x_1 = 101.$$

Problema 5.30 Resuelva para x

$$\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x + \sqrt{x - 11}} = 4.$$

Problema 5.31 Dos estudiantes trataron de resolver la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$. Maguer ambos estudiantes ejecutaron todos los pasos correctamente, el primero copió mal el coeficiente b y obtuvo las soluciones $x = -6, 1$. El segundo copió mal c y obtuvo las soluciones $x = 2, 3$. ¿Cuáles son las soluciones correctas?

Capítulo 6

Identidades algebraicas

Una de las identidades más útiles en la resolución de problemas es la diferencia de cuadrados

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Muchas expresiones se pueden factorizar si se convierten en diferencias de cuadrados. Por ejemplo

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2). \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2) \end{aligned}$$

Otra identidad útil es la de diferencia de cubos

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2).$$

Si n es un entero positivo tenemos en general el siguiente teorema, cuya demostración dejaremos a cargo del lector.

Teorema 6.0.1 Sea n un entero positivo. Entonces

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Corolario 6.0.1 Sean x, y enteros con $x \neq y$ y sea n un entero positivo. Entonces $x - y$ divide a $x^n - y^n$.

Por ejemplo, sin necesidad de hacer cálculos, el corolario anterior nos dice que $781 = 1996 - 1215$ divide a $1996^5 - 1215^5$.

Otros resultados útiles son los siguientes

Teorema 6.0.2 Si n es un entero positivo impar

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \cdots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Corolario 6.0.2 Sean x, y enteros con $x \neq y$ y sea n un entero positivo impar. Entonces $x + y$ divide a $x^n + y^n$.

Por ejemplo $129 = 2^7 + 1$ divide a $2^{861} + 1$ y $1001 = 1000 + 1 = 999 + 2 = \cdots = 500 + 501$ divide a

$$1^{1997} + 2^{1997} + \cdots + 1000^{1997}.$$

Ejemplo 6.0.50 Si $a^2 + b^2 = 1$ y $ab = 2$, halle $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $a^4 + b^4$.

Solución: Tenemos

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 5,$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = -3,$$

y

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = -7.$$

Ejemplo 6.0.51 Hallar todos los primos de la forma $n^3 - 1$, donde n es un entero positivo.

Solución: Como $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$ y como $n^2+n+1 > 1$, deberemos tener $n - 1 = 1$. Luego el único primo de la forma deseada es $2^3 - 1 = 7$.

Ejemplo 6.0.52 Demostrar que el único primo de la forma $n^4 + 4$ es el 5.

Solución: Podemos restrinjirnos a enteros positivos. Vemos que

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

Si este producto es un número primo entonces el factor más pequeño debe ser igual a 1. Así $n^2 - 2n + 2 = 1$, o sea $(n-1)^2 = 0$, esto es $n = 1$. Así, el único primo de esta forma es $1^4 + 4 = 5$.

Ejemplo 6.0.53 Dado que 1979 es primo, demostrar que si

$$\frac{u}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1978}.$$

entonces 1979 divide a u.

Solución: Rearreglemos la suma de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left(1 + \tfrac{1}{1978}\right) + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{1977}\right) \\ + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{1976}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{989} + \tfrac{1}{990}\right) \\ = \tfrac{1979}{1 \cdot 1978} + \tfrac{1979}{2 \cdot 1977} + \cdots + \tfrac{1979}{989 \cdot 990}. \end{aligned}$$

Al sumar todas las fracciones arriba en la derecha , vemos que el denominador divide a 1978!. Como 1979 es primo, ningún factor de 1978! cancela al 1979 del numerador. Luego, 1979 divide al numerador de la fracción.

Ejemplo 6.0.54 Demostrar la siguiente identidad de Catalán:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Solución: La cantidad de la izquierda es

$$\begin{aligned} & \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n}\right) \\ & \quad -2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \cdots + \tfrac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n}\right) \\ & \quad -2 \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n}\right) \\ & \quad -\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right) \\ &= \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{2n}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Ejemplo 6.0.55 Si $\tan x + \cot x = a$, exprese $\tan^3 x + \cot^3 x$ como un polinomio en a.

Solución: Primero observemos que

$$a^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2,$$

de donde $a^2 - 2 = \tan^2 x + \cot^2 x$. Así

$$\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)(\tan^2 x - \tan x \cot x + \cot^2 x) = a(a^2 - 3).$$

Ejemplo 6.0.56 Factorizar

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{80}.$$

Solución: Pongamos $S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{80}$. Entonces $xS = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{80} + x^{81} = S - 1 + x^{81}$. De aquí

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{80} = \frac{x^{81} - 1}{x - 1}.$$

Luego

$$\frac{x^{81} - 1}{x - 1} = \frac{x^{81} - 1}{x^{27} - 1} \cdot \frac{x^{27} - 1}{x^9 - 1} \cdot \frac{x^9 - 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Por lo tanto

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{80} = (x^{54} + x^{27} + 1)(x^{18} + x^9 + 1)(x^6 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1).$$

Ejemplo 6.0.57 Hallar la raíz cuadrada de

$$5 + 2\sqrt{6}.$$

Solución: Observe que

$$5 + 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2.$$

Luego

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Ejemplo 6.0.58 Simplificar

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

Solución: Como $1 = n+1-n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} & = & \sqrt{2}-\sqrt{1} \\
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} & = & \sqrt{3}-\sqrt{2} \\
\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} & = & \sqrt{4}-\sqrt{3} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} & = & \sqrt{100}-\sqrt{99},
\end{array}$$

y así

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \sqrt{100}-\sqrt{1} = 9.$$

Ejemplo 6.0.59 Demostrar que para todo entero positivo n, la expresión

$$2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$$

es siempre divisible por 1897.

Solución: Por el Teorema 6.1, $2903^n - 803^n$ es divisible por $2903-803 = 2100 = 7 \cdot 300$ y $261^n - 464^n$ es divisible por $-203 = (-29)\cdot 7$. Por lo tanto, la expresión es divisible por 7. Además $2903^n - 464^n$ es divisible por $2903-464 = 2439 = 9 \cdot 271$ y $-803^n + 261^n$ es divisible por $-803+261 = -542 = -2 \cdot 271$. Así pues, como la expresión es divisible por 7 y por 271 y como estos son relativamente primos, la expresión es pues divisible por $7 \cdot 271 = 1897$.

Problemas

Problema 6.1 Dado que $987789^2 = 975727108521$, halle el valor de 987790^2.

Problema 6.2 Halle $a^6 + a^{-6}$ dado que $a^2 + a^{-2} = 4$.

Respuesta: 52

Problema 6.3 Demostrar que el entero

$$\underbrace{11\ldots11}_{221\ 1's}$$

es compuesto.

Problema 6.4 Demostrar que 7 divide a

$$2222^{5555} + 5555^{2222}.$$

Pista:

$$2222^{5555} + 5555^{2222} = (2222^{5555} + 4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222}) - (4^{5555} - 4^{2222}).$$

Problema 6.5 Demostrar que 100 divide a $11^{10} - 1$.

Problema 6.6 Demostrar que $27195^8 - 10887^8 + 10152^8$ es exactamente divisible por 26460.

Problema 6.7 Demostrar que si k es un entero positivo impar

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

es divisible por

$$1 + 2 + \cdots + n.$$

Problema 6.8 Demostrar que $1492^n - 1770^n - 1863^n + 2141^n$ es divisible por 1946 para todo entero positivo n.

Problema 6.9 Dividir $x^{128} - y^{128}$ por

$$(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8)(x^{16} + y^{16})(x^{32} + y^{32})(x^{64} + y^{64}).$$

Problema 6.10 Halle la suma de los factores primos de $2^{16} - 1$.

Problema 6.11 Dado que 1002004008016032 tiene un factor primo $p > 250000$, hállelo.

Problema 6.12 Si $a^3 - b^3 = 24$, $a - b = 2$, halle el valor de $(a+b)^2$.

Problema 6.13 Hallar
$$\sqrt{11 + \sqrt{72}}.$$

Problema 6.14 Hallar
$$\sqrt{10 + 4i\sqrt{6}}.$$

Problema 6.15 Evalúe la suma
$$\frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16}}.$$

Problema 6.16 Factorice $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{624}$.

Problema 6.17 Expandir el producto
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{1024}).$$

Problema 6.18 Demostrar que si $2^n - 1$ es un número primo, entonces n es un número primo. Primos de esta forma se llaman *primos de Mersenne.*

Problema 6.19 Demostrar que si $2^n + 1$ es un número primo, entonces n es una potencia de 2. Primos de esta forma se llaman primos de Fermat.

Problema 6.20 Demuestre que
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right).$$

Problema 6.21 Demostrar que
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Problema 6.22 Demostrar que
$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2).$$

Problema 6.23 Demostrar que

$$(x+a)^7 - x^7 - a^7 = 7xa(x+a)(x^2+xa+a^2)^2.$$

Problema 6.24 Demostrar que

$$A = x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + \cdots + x^{1111} + 1$$

es divisible por $B = x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x^2 + x + 1$.

Problema 6.25 La diferencia

$$\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}}$$

es un entero. Hállelo.

Capítulo 7

Los enteros

Una de las propiedades más útiles de los enteros es la expresada por el algoritmo de división:

Teorema 7.0.3 Algoritmo de división Sean a, b enteros con $a > 0$. Entonces existen enteros q y r con

$$b = aq + r, \quad 0 \leq r < a.$$

Por ejemplo, $39 = 4 \cdot 9 + 3$. Vemos pues que el algoritmo de división discrimina a los enteros según el residuo que dejan al ser divididos por a. Por ejemplo, si $a = 2$, descomponemos a los enteros en las dos familias

$$A_0 = \{\ldots -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\},$$

$$A_1 = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}.$$

Así pues todo entero es de la forma $2k$ o $2k+1$. Observe que todo entero de la forma $2k+1$ es también de la forma $2t-1$. Si $a = 4$ entonces descomponemos a los enteros en las cuatro familias

$$B_0 = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\},$$

$$B_1 = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\},$$

$$B_2 = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\},$$

$$B_3 = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}.$$

Así pues, los enteros son de la forma $4k, 4k+1, 4k+2$ o $4k+3$. Observe que todo entero de la forma $4k+1$ es también de la forma $4t-3$ y que todo entero de la forma $4k+3$ es también de la forma $4t-1$.

Ejemplo 7.0.60 Sea r el residuo cuando $1059, 1417$ y 2312 se dividen por $d > 1$. Halle el valor de $d-r$.

Solución: Por el algoritmo de división, existen enteros q_1, q_2, q_3 con $1059 = dq_1 + r, 1417 = dq_2 + r$ y $2312 = dq_3 + r$. Restando obtenemos $1253 = d(q_3 - q_1), 895 = d(q_3 - q_2)$ y $358 = d(q_2 - q_1)$. Como $7 \cdot 179$, $895 = 5 \cdot 179, 358 = 2 \cdot 179$, vemos que $d = 179$. Como $1059 = 5 \cdot 179 + 164$, $r = 164$. Finalmente, $d - r = 15$.

Ejemplo 7.0.61 Demostrar que el cuadrado de todo entero es de la forma $4k$ o de la forma $4k+1$.

Solución: Si el entero es par, es decir de la forma $2a$, su cuadrado es $(2a)^2 = 4a^2$, que es de la forma $4k$. Si el entero es impar, digamos $2t+1$, entonces $(2t+1)^2 = 4(t^2+t)+1$, que es de la forma $4k+1$.

Ejemplo 7.0.62 Demostrar que ningún entero en la sucesión

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

es el cuadrado de un entero.

Solución: Como es obvio que 11 no es un cuadrado, nos ocuparemos de los demás enteros en la sucesión. Para $n > 2$,

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\ 1's} = \underbrace{11\ldots11}_{n-2\ 1's}00 + 12 - 1 = 100 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{n-2\ 1's} + 12 - 1.$$

Así pues, todo número en esta sucesión es de la forma $4k-1$. Pero por el ejercicio anterior, $4k-1$ no puede ser el cuadrado de ningún entero. Esto completa la demostración.

Ejemplo 7.0.63 Demuestre que $n^2 + 23$ es divisible por 24 para un número infinito de números n.

Solución: Tenemos que $n^2+23 = n^2-1+24 = (n-1)(n+1)+24$. Luego, las familias $n = 24m \pm 1, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ producen infinitos valores de n^2+23 que son divisibles por 24.

Ejemplo 7.0.64 Demostrar que todos los enteros en la sucesión

$$49, 4489, 444889, 44448889, \underbrace{44\ldots 44}_{n\ 4's}\underbrace{88\ldots 88}_{n-1\ 8's}9$$

son cuadrados.

Solución: Observe que

$$\begin{aligned}
\underbrace{44\ldots 44}_{n\ 4's}\underbrace{88\ldots 88}_{n-1\ 8's}9 &= \underbrace{44\ldots 44}_{n\ 4's}\cdot 10^n + \underbrace{88\ldots 88}_{n-1\ 8's}\cdot 10 + 9\\
&= \tfrac{4}{9}\cdot(10^n-1)\cdot 10^n + \tfrac{8}{9}\cdot(10^{n-1}-1)\cdot 10 + 9\\
&= \tfrac{4}{9}\cdot 10^{2n} + \tfrac{4}{9}\cdot 10^n + \tfrac{1}{9}\\
&= \tfrac{1}{9}(2\cdot 10^n + 1)^2\\
&= \left(\tfrac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

Nos falta demostrar que esta última cantidad es entera, esto es, que 3 divide a $2\cdot 10^n + 1 = 2\underbrace{00\ldots 00}_{n-1\ 0's}1$. Pero la suma de los dígitos de esta última cantidad es 3, y por lo tanto este entero es divisible por 3.

Ejemplo 7.0.65 Demostrar que el cuadrado de todo primo mayor que 3 deja residuo 1 al ser dividido por 12.

Solución: Si $p > 3$ es primo, entonces p es de la forma $12k \pm 1, 12k \pm 5$. Ahora bien

$$(12k \pm 1)^2 = 12(12k^2 \pm 2k) + 1$$

y

$$(12k \pm 5)^2 = 12(12k^2 \pm 10k + 2) + 1.$$

Esto demuestra la aserción.

Ejemplo 7.0.66 Demostrar que si ambos p y $8p-1$ son primos, entonces $8p+1$ es compuesto.

Solución: Si $p = 3$, $8p - 1 = 23$ y $8p + 1 = 25$, luego la aseveración se cumple para $p = 3$. Si $p > 3$, p es de la forma $3k+1$ o $3k+2$. Si $p = 3k+1$, $8p-1 = 24k-7$ y $8p+1 = 24k-6$, que es divisible por 6 y por lo tanto no es primo. Si $p = 3k+2$, $8p-1 = 24k-15$ no es primo.

Ejemplo 7.0.67 Demostrar que si n es un entero positivo tal que $2n+1$ es un cuadrado, entonces $n+1$ es la suma de dos cuadrados consecutivos.

Solución: Como $2n+1$ es un cuadrado impar, tenemos $2n+1 = (2t+1)^2$ para algún entero t. Resolviendo para n,

$$n = \frac{(2t+1)^2 - 1}{2} = 2t^2 + 2t.$$

Luego $n+1 = t^2 + (t+1)^2$, la suma de dos cuadrados consecutivos.

Ejemplo 7.0.68 Demostrar que si $3n+1$ es un cuadrado, entonces $n+1$ es la suma de tres cuadrados.

Solución: Es claro que $3n+1$ no es un múltiplo de 3, luego $3n+1 = (3k \pm 1)^2$. De aquí

$$n+1 = \frac{(3k \pm 1)^2 - 1}{3} + 1 = 3k^2 \pm 2k + 1 = k^2 + k^2 + (k \pm 1)^2,$$

como queríamos demostrar.

Ejemplo 7.0.69 Hallar todos los enteros con dígito inicial 6 tales que si se les suprime este dígito incial,el número resultante es 1/25 del número original.

Solución: Sea x el entero buscado. Entonces $x = 6 \cdot 10^n + y$ donde y es un entero positivo. La condición del problema estipula que

$$y = \frac{1}{25}\left(6 \cdot 10^n + y\right),$$

o sea,

$$y = \frac{10^n}{4} = 25 \cdot 10^{n-2}.$$

Esto requiere $n \geq 2$ y por lo tanto $y = 25, 250, 2500, 25000$, etc.. Luego $x = 625, 6250, 62500, 625000$, etc..

Ejemplo 7.0.70 Sea A un entero positivo y A' sea el entero positivo resultante de alguna permutación específica de los dígitos de A. Demostrar que si $A+A' = 10^{10}$ entonces A es divisible por 10.

Solución: Claramente, A y A' deberán tener 10 dígitos cada uno. Pongamos pues

$$A = \overline{a_{10}a_9a_8\dots a_1}$$

y

$$A' = \overline{b_{10}b_9b_8\dots b_1},$$

donde $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots, 10$ son los dígitos de A y A' respectivamente. Ahora, como $A + A' = 10000000000$, deberemos tener que $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \dots = a_i + b_i = 0$ y

$$a_{i+1} + b_{i+1} = 10, a_{i+2} + b_{i+2} = \dots = a_{10} + b_{10} = 9,$$

para algún subíndice $i, 0 \le i \le 9$. Note que si $i = 9$ no hay ninguna suma de las $a_{i+2} + b_{i+2}, a_{i+3} + b_{i+3}, \dots$ y si $i = 0$ no hay ninguna suma de las $a_1 + b_1, \dots, a_i + b_i$.

Sumando,

$$a_1+b_1+a_2+b_2+\dots+a_i+b_i+a_{i+1}+b_{i+1}+\dots+a_{10}+b_{10} = 10+9(9-i).$$

Ahora bien, si i es par, $10 + 9(9 - i)$ es impar y si i es impar $10 + 9(9 - i)$ es par. Pero como

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = b_1 + b_2 + \dots + b_{10},$$

tenemos

$$a_1+b_1+a_2+b_2+\dots+a_i+b_i+a_{i+1}+b_{i+1}+\dots+a_{10}+b_{10} = 2(a_1+a_2+\dots+a_{10}),$$

un entero par. Colegimos que i es impar, lo que necesariamente implica $a_1 = b_1 = 0$, esto es, A y A' son ambos divisibles por 10.

Ejemplo 7.0.71 ¿Cuántos ceros hay al final de 999!?

Solución: El número de ceros está determinado por la potencia mayor de 10 que divide a 999!. Como hay menos mútiplos de 5 en $\{1, 2, \dots, 999\}$ que múltiplos de 2, el número de ceros está pues determinado por la potencia mayor de 5 que divide a 999!. Esta es

$$\left[\frac{999}{5}\right]+\left[\frac{999}{5^2}\right]+\left[\frac{999}{5^3}\right]+\left[\frac{999}{5^4}\right]=199+39+7+1=246.$$

Por lo tanto, 999! termina en 246 ceros.

Ejemplo 7.0.72 La suma de enteros positivos es 1996. ¿Cuál es el valor máximo de su producto?

Solución: Tenemos enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1996$. Es claro que para maximizar $a_1 a_2 \cdots a_n$, ninguna de las a_k's puede ser igual a 1. Demostraremos que para obtener un producto máximo deberemos tener la mayoría de las $a_k = 3$ y a lo sumo dos $a_j = 2$. Supongamos que $a_j > 4$. Si substituimos a_j por los dos términos $a_j - 3$ y 3 la suma no se afecta, pero el producto incrementa pues $a_j < 3(a_j - 3)$. Así pues las a_k's son iguales a 2, 3 ó 4. Pero como $2+2+2 = 3+3$ y $2 \times 2 \times 2 < 3 \times 3$, si hay tres o más 2's, los podemos substituir con 3's. Como $1996 = 3(665)+1 = 3(664)+4$, el producto máximo es pues $3^{664} \times 4$.

Ejemplo 7.0.73 Demostrar que el producto de cuatro enteros consecutivos es siempre divisible por 24.

Solución: Sean $n-1, n, n+1, n+2$ los cuatro enteros consecutivos. Uno de ellos es divisible por 3, uno de ellos es de la forma $4k$ (y por lo tanto divisible por 4) y otro de ellos es de la forma $4a+2$ (y por ende divisible por 2). Luego el producto es divisible por $3 \times 4 \times 2 = 24$.

Ejemplo 7.0.74 Demostrar que el producto de cuatro enteros consecutivos, diferentes de 0, jamás es un cuadrado.

Solución: Sean $n-1, n, n+1, n+2$ cuatro enteros consecutivos. Entonces su producto P es

$$P = (n-1)n(n+1)(n+2) = (n^3-n)(n+2) = n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n.$$

Ahora bien,

$$(n^2+n-1)^2 = n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1 = P + 1 > P.$$

Como $P \neq 0$ y P es 1 más que un cuadrado, P no puede ser un cuadrado.

Ejemplo 7.0.75 Hallar todos los enteros positivos de la forma

$$r + \frac{1}{r},$$

donde r es un número racional.

Demostraremos que la expresión $r + 1/r$ es entero sólo cuando $r = 1$, en cuyo caso $r + 1/r = 2$. Sea pues

$$r + \frac{1}{r} = k,$$

k un entero positivo. Luego

$$r = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Como k es un entero, r puede ser entero si y sólo si $k^2 - 4$ es un cuadrado de la misma paridad que k. Ahora, si $k \geq 3$,

$$(k-1)^2 < k^2 - 4 < k^2,$$

esto es, $k^2 - 4$ está entre dos cuadrados consecutivos y por lo tanto no puede ser un cuadrado. Si $k = 1$, $\sqrt{k^2 - 4}$ no es real. Si $k = 2$, $k^2 - 4 = 0$. Luego, $r + 1/r = 2$, esto es, $r = 1$. Esto termina la demostración.

Ejemplo 7.0.76 ¿Para cuántos enteros n en $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ es el dígito de las decenas de n^2 impar?

Solución: En el subconjunto $\{1, 2, \ldots 10\}$ hay sólo dos valores de n (4 y 6) para los cuales el dígito de las decenas de n^2 es impar. Ahora bien, $(n + 10)^2 = n^2 + 20n + 100$ tiene la misma paridad en su dígito de las decenas que el dígito de las decenas de n^2. Luego, hay $2 \times 10 = 20$ enteros n para los cuales se verifica la condición prescrita.

Problemas

Problema 7.1 Sea a el entero

$$a = \underbrace{111 \ldots 1}_{m\ 1's}$$

y sea b el entero

$$b = 1\underbrace{000\ldots0}_{m-1\ 0's}5.$$

Demostrar que $ab+1$ es un cuadrado perfecto.

Problema 7.2 Demostrar que el cuadrado de un entero es de la forma $3k$ o $3k+1$. Luego demostrar que si los lados de un triángulo rectángulo son enteros, entonces 3 divide a alguno de los lados.

Problema 7.3 Hallar la suma

$$5+55+555+\cdots+\underbrace{5\ldots5}_{n\ 5's}.$$

Problema 7.4 ¿Qué dígitos aparecen en el producto

$$\underbrace{3\ldots3}_{666\ 3's}\cdot\underbrace{6\ldots6}_{666\ 6's}?$$

Problema 7.5 Demostrar que no existe ningún entero con la propiedad de que si su dígito inicial se suprime, el entero resultante es 1/35 del entero inicial.

Problema 7.6 ¿Cuál es la potencia mayor de 7 que divide a 1000!?

Problema 7.7 Demostrar que la suma de todos los enteros de n dígitos, $n \geq 3$, es

$$494\underbrace{99\ldots9}_{n-3\ 9's}55\underbrace{00\ldots0}_{n-2\ 0's}.$$

Problema 7.8 Demostrar que para todo entero positivo n,

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n\ 1's}-\underbrace{22\ldots2}_{n\ 2's}$$

es un cuadrado.

Problema 7.9 Demostrar que para todo número $a \neq 0, a \neq \pm i\sqrt{3}$ se verifica la fórmula de Reyley (1825):

$$a = \left(\frac{a^6 + 45a^5 - 81a^2 + 27}{6a(a^2+3)^2}\right)^3 + \left(\frac{-a^2 + 30a^2 - 9}{6a(a^2+3)}\right)^3 + \left(\frac{-6a^3 + 18a}{(a^2+3)^2}\right)^3.$$

Si a es racional, esto demuestra que todo número racional puede expresarse como la suma de tres cubos de números racionales.

Problema 7.10 Demostrar que para $n \geq 2$, la expresión

$$\frac{n^3 + (n+2)^3}{4}$$

es un entero compuesto.

Capítulo 8

Aritmética modular

Comenzaremos primero con la siguiente definición. Si $a \neq 0$ es un entero, decimos que a *divide* al entero b (escrito $a|b$) si existe un entero k con $ak = b$. Por ejemplo, $11|99$ porque $11 \cdot 9 = 99$.

Las siguientes propiedades de divisibilidad son obvias. Sean a, b, c, x, y enteros. Entonces

$$ab \neq 0, a|b, \ b|c \Longrightarrow a|c \tag{8.1}$$

Por ejemplo, $11|99$ y $33|330$ implica que $11|330$.

$$a \neq 0, a|b, \ a|c \Longrightarrow a|(xb + yc) \tag{8.2}$$

Por ejemplo, $7|21$ y $7|49$ implica que 7 divide a $3 \cdot 21 - 2 \cdot 49 = -35$.

Si a no divide a b escribimos $a \not| b$. Note además que $a|c$, $b|c$ *no necesariamente implica que* $ab|c$. Por ejemplo, $2|6, 6|6$ pero claramente $12 = 2 \cdot 6 \not| 6$.

Dado un entero $n \geq 2$, el algoritmo de división distribuye los enteros en una de n clases dependiendo del residuo que deje el entero al ser dividido por n. Si u y v dejan el mismo residuo al ser divididos por n, o de manera equivalente, si $u - v$ es divisible por n, entonces decimos que u y v son *congruentes módulo n* y escribimos $u \equiv v \bmod n$. Por ejemplo, $3 \equiv 13 \equiv 26 \equiv -7 \bmod 10$.

Notamos de paso que si $u \equiv v \bmod n$, entonces $u = v + an$ para algún entero a. Por ejemplo, $3 \equiv 24 \bmod 7$ y $3 = 24 + (-3)7$.

El siguiente teorema es de suma utilidad.

Teorema 8.0.4 Sea $n \geq 2$ un entero. Si $x \equiv y$ mod n y $u \equiv v$ mod n entonces

$$ax + bu \equiv ay + bv \bmod n.$$

Demostración Como $n|(x-y)$, $n|(u-v)$ entonces hay enteros s, t con $ns = x-y$, $nt = u-v$. Luego

$$a(x-y)+b(u-v) = n(as+bt),$$

es decir,

$$n|(ax+bu-ay-bv).$$

Esto último es equivalente a

$$ax+bu \equiv ay+bv \text{ mod } n.$$

Corolario 8.0.3 Sea $n \geq 2$ un entero. Si $x \equiv y$ mod n y $u \equiv v$ mod n entonces

$$xu \equiv yv \text{ mod } n.$$

Demostración Pongamos $a = u, b = y$ en el teorema anterior.

Corolario 8.0.4 Sea $n > 1$ un entero, $x \equiv y$ mod n y j un entero positivo. Entonces $x^j \equiv y^j$ mod n.

Ejemplo 8.0.77 Hallar el residuo cuando 6^{1987} es dividido por 37.

Solución: $6^2 \equiv -1$ mod 37. Así pues, $6^{1987} \equiv 6 \cdot 6^{1986} \equiv 6(6^2)^{993} \equiv 6(-1)^{993} \equiv -6 \equiv 31$ mod 37.

Ejemplo 8.0.78 Hallar el residuo cuando

$$12233 \cdot 455679 + 87653^3$$

es dividido por 4.

Solución: $12233 = 12200+32+1 \equiv 1$ mod 4. De manera semejante, $455679 = 455600+76+3 \equiv 3$, $87653 = 87600+52+1 \equiv 1$ mod 4. Así

$$12233 \cdot 455679 + 87653^3 \equiv 1 \cdot 3 + 1^3 \equiv 4 \equiv 0 \text{ mod } 4.$$

O sea, que $12233 \cdot 455679 + 87653^3$ es divisible por 4.

Ejemplo 8.0.79 Hallar el último dígito de 3^{100}.

Solución: Queremos hallar 3^{100} mod 10. Observemos que $3^2 \equiv -1 \mod 10$. Luego, $3^{100} = (3^2)^{50} \equiv (-1)^{50} \equiv 1 \mod 10$. Así, el último dígito es el 1.

Ejemplo 8.0.80 Demostrar que $7|(2222^{5555} + 5555^{2222})$.

Solución: $2222 \equiv 3 \mod 7$, $5555 \equiv 4 \mod 7$ y $3^5 \equiv 5 \mod 7$. Ahora bien, $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 3^{5555} + 4^{2222} \equiv (3^5)^{1111} + (4^2)^{1111} \equiv 5^{1111} - 5^{1111} \equiv 0$ mod 7, lo que demuestra la aserción.

Ejemplo 8.0.81 Hallar el dígito de las unidades de 7^{7^7}.

Solución: Tenemos que hallar 7^{7^7} mod 10. Ahora bien, como $7^2 \equiv -1 \mod 10$, entonces tenemos $7^3 \equiv 7^2 \cdot 7 \equiv -7 \equiv 3 \mod 10$ y $7^4 \equiv (7^2)^2 \equiv 1 \mod 10$. Además, $7^2 \equiv 1 \mod 4$ y por lo tanto $7^7 \equiv (7^2)^3 \cdot 7 \equiv 3 \mod 4$, lo que quiere decir que hay un entero t tal que $7^7 = 3 + 4t$. Ensamblando todo esto,

$$7^{7^7} \equiv 7^{4t+3} \equiv (7^4)^t \cdot 7^3 \equiv 1^t \cdot 3 \equiv 3 \mod 10.$$

Así el último dígito es un 3.

Ejemplo 8.0.82 Demostrar que 7 divide a $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ para todo número natural n.

Solución: Observemos que $3^{2n+1} \equiv 3 \cdot 9^n \equiv 3 \cdot 2^n \mod 7$ y $2^{n+2} \equiv 4 \cdot 2^n \mod 7$. Luego

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 7 \cdot 2^n \equiv 0 \mod 7,$$

para todo número natural n.

Ejemplo 8.0.83 ¿Qué dígitos debe substituirse por a y b en $30a0b03$ de tal manera que el entero resultante sea divisible por 13 ?

Solución: Como $30a0b03 = 3 + 100b + 10000a + 3000000$, observamos que $30a0b03 \equiv 3 + 9b + 3a + 3 \equiv 6 + 9b + 3a \mod 13$. Para que $30a0b03$ sea divisible por 13 necesitamos $9b + 3a \equiv 7 \mod 13$. Aquí claro está, debemos tener $0 \leq a, b \leq 9$. Por inspección vemos que $a = 8, b = 1; a = 5, b = 2; a = 2, b = 3; a = 9, b = 5; a = 6, b = 6; a = 3, b = 7; a = 0, b = 8$ Luego 3080103, 3050203, 3020303, 3090503, 3060603, 3030703, 3000803 son todos divisibles por 13.

Ejemplo 8.0.84 Hallar los cuadrados mod 13.

Solución: Observemos primero que sólo necesitamos cuadrar los enteros hasta 6, porque $r^2 \equiv (13-r)^2$ mod 13. Cuadrando los enteros no negativos hasta el 6, obtenemos $0^2 \equiv 0, 1^2 \equiv 1, 2^2 \equiv 4, 3^2 \equiv 9, 4^2 \equiv 3, 5^2 \equiv 12, 6^2 \equiv 10$ mod 13. Por lo tanto, los cuadrados mod 13 son 0, 1, 4, 9, 3, 12, and 10.

Ejemplo 8.0.85 Demostrar que la ecuación $x^2 - 5y^2 = 2$ no tiene soluciones enteras.

Solución: Si $x^2 = 2 - 5y^2$, entonces $x^2 \equiv 2$ mod 5. Pero 2 no es un cuadrado mod 5.

Ejemplo 8.0.86 Demostrar la siguiente observación de Euler: $2^{32}+1$ es divisible por 641.

Solución: Observemos que $641 = 2^7 \cdot 5 + 1 = 2^4 + 5^4$. Luego $2^7 \cdot 5 \equiv -1$ mod 641 y $5^4 \equiv -2^4$ mod 641. Ahora bien, $2^7 \cdot 5 \equiv -1$ mod 641 nos da $5^4 \cdot 2^{28} = (5 \cdot 2^7)^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$ mod 641. Esta útima congruencia y $5^4 \equiv -2^4$ mod 641 nos da $-2^4 \cdot 2^{28} \equiv 1$ mod 641, lo que significa que $641|(2^{32}+1)$.

Ejemplo 8.0.87 Hallar un número infinito de enteros n tal que $2^n + 27$ sea divisible por 7.

Solución: Observemos que $2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 1, 2^4 \equiv 2, 2^5 \equiv 4, 2^6 \equiv 1$ mod 7 y así $2^{3k} \equiv 1$ mod 3 para todos los enteros positivos k. Luego $2^{3k} + 27 \equiv 1 + 27 \equiv 0$ mod 7 para todos los enteros positivos k. Esto produce una familia infinita de enteros $n = 3k, k = 1, 2, \ldots$ tal que $2^n + 27$ es divisible por 7.

Ejemplo 8.0.88 ¿Existen acaso enteros positivos x, y tal que $x^3 = 2^y + 15$?

Solución: No. Los cubos mod 7 son 0, 1, and 6. Ahora bien, cada potencia de de 2 es congruente a 1, 2, ó 4 mod 7. Así pues, $2^y + 15 \equiv 2, 3$, or 5 mod 7. Esto es imposible.

Ejemplo 8.0.89 Demostrar que $2^k - 5, k = 0, 1, 2, \ldots$ nunca deja residuo 1 cuando es dividido por 7.

Solución: $2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 1 \mod 7$ y este ciclo de tres se repite. Así pues, $2^k - 5$ deja residuos 3, 4, ó 6 al ser dividido por 7.

Ejemplo 8.0.90 (USAMO 1979) Determine todas las soluciones no negativas

$$(n_1, n_2, \dots, n_{14})$$

de la ecuación diofántica

$$n_1^4 + n_2^4 + \cdots + n_{14}^4 = 1599$$

de haberlas.

Solución: No hay tales soluciones. Todas las cuartas potencias mod 16 son o bien $\equiv 0$ o bien $\equiv 1 \mod 16$. Esto significa que

$$n_1^4 + \cdots + n_{14}^4$$

es a lo sumo 14 mod 16. Pero $1599 \equiv 15 \mod 16$.

Usando congruencias y el sistema de numeración decimal podemos obtener varias reglas de divisibilidad. La más famosa es quizás la siguiente.

Teorema 8.0.5 Regla de los 9's Un número natural n es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 9.

Demostración Sea $n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$ la expansión en base-10 de n. Como $10 \equiv 1 \mod 9$, tenemos $10^j \equiv 1 \mod 9$. Colegimos que $n = a_k 10^k + \cdots + a_1 10 + a_0 \equiv a_k + \cdots + a_1 + a_0$, de donde resulta la aserción.

Ejemplo 8.0.91 (AHSME 1992) Los enteros de dos dígitos desde el 19 hasta el 92 se escriben consecutivamente para obtener el entero

$$192021222324 \cdots 89909192.$$

¿Cuál es la potencia mayor de 3 que divide a este número?

Solución: Por la regla de los 9's este número es divisible por 9 si y sólo si

$$19 + 20 + 21 + \cdots + 92 = 37^2 \cdot 3$$

lo es. Por lo tanto, el número es divisible por 3 pero no por 9.

Ejemplo 8.0.92 (IMO 1975) Cuando 4444^{4444} se escribe en notación decimal, la suma de sus dígitos es A. Sea B la suma de los dígitos de A. Hallar la suma de los dígitos de B. (A y B se escriben en notación decimal.)

Solución: Tenemos que $4444 \equiv 7 \mod 9$, y por lo tanto $4444^3 \equiv 7^3 \equiv 1 \mod 9$. Así $4444^{4444} = 4444^{3(1481)} \cdot 4444 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 7 \mod 9$. Sea C la suma de los dígitos de B.

Por la regla de los 9's, $7 \equiv 4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \mod 9$. Ahora bien, $4444 \log_{10} 4444 < 4444 \log_{10} 10^4 = 17776$. Esto significa que 4444^{4444} tiene a lo sumo 17776 dígitos, así la suma de los dígitos de 4444^{4444} es a lo sumo $9 \cdot 17776 = 159984$, de aquí $A \leq 159984$. Entre los números naturales ≤ 159984 el que tiene la suma máximal de sus dígitos es 99999, de donde colegimos que $B \leq 45$. De todos los enteros naturales ≤ 45, 39 tiene la máxima suma digital, es decir 12. Así la suma de los dígitos de B es a lo sumo 12. Pero como $C \equiv 7 \mod 9$, se sigue que $C = 7$.

Las congruencias mod 9 a veces pueden ser usadas para verificar multiplicaciones. Por ejemplo, $875961 \cdot 2753 \neq 2410520633$, ya que si esto fuese cierto entonces

$$(8+7+5+9+6+1)(2+7+5+3) \equiv 2+4+1+0+5+2+0+6+3+3 \mod 9.$$

Pero esto dice que $0 \cdot 8 \equiv 8 \mod 9$, que es patentemente falso.

Se puede establecer un criterio de divisibilidad por 11 de una manera semejante. Sea $n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$. Como $10 \equiv -1 \mod 11$, tenemos $10^j \equiv (-1)^j \mod 11$. Por lo tanto $n \equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \cdots - a_1 + a_0 \mod 11$, o sea, n es divisible por 11 si y sólo si la suma alternante de sus dígitos es divisible por 11. Por ejemplo, $912282219 \equiv 9-1+2-2+8-2+2-1+9 \equiv 7 \mod 11$ y así 912282219 no es divisible por 11, mientras que $8924310064539 \equiv 8-9+2-4+3-1+0-0+6-4+4-3+9 \equiv 0 \mod 11$, y así 8924310064539 es divisible por 11.

Problemas

Problema 8.1 Si $62ab427$ es un múltiplo de 99, hallar los dígitos a y b.

Problema 8.2 Demostrar que un número natural es divisible por $2^n, n = 1, 2, 3, \ldots$ si y sólo si el número formado por sus últimos n dígitos es divisible por 2^n.

Problema 8.3 Hallar el último dígito de

$$2333333334 \cdot 9987737 + 12 \cdot 21327 + 12123 \cdot 99987.$$

Problema 8.4 Demostrar que la ecuación

$$x^2 + 3xy - 2y^2 = 122$$

no posee soluciones enteras.

Problema 8.5 Hallar cuántas $n, 1 \leq n \leq 25$ poseen la propiedad que $n^2 + 15n + 122$ es divisible por 6.

Pista: $n^2 + 15n + 122 \equiv n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$ mod 6.

Problema 8.6 Demostrar que en cualquier subconjunto de 55 elementos tomado del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, siempre se encontrarán dos elementos que diferirán por 9.

Problema 8.7 (AIME 1994) La sucesión creciente

$$3, 15, 24, 48, \ldots,$$

consiste de aquellos mútiplos de 3 que son uno menos de un cuadrado. ¿Cuál es el residuo cuando el 1994avo término de esta sucesión se divide por 1000?

Respuesta: 63

Problema 8.8 Demostrar que para cualesquiera $a, b, c \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, n > 3$, existe un entero k tal que $n \not| (k + a), n \not| (k + b), n \not| (k + c)$.

Problema 8.9 (AIME 1983) Sea $a_n = 6^n + 8^n$. Determine el residuo cuando a_{83} se divide por 49.

Problema 8.10 Demostrar que si $9 | (a^3 + b^3 + c^3)$, entonces $3 | abc$, para enteros a, b, c.

Problema 8.11 Describa todos los enteros n tal que $10 | n^{10} + 1$.

Problema 8.12 Demostrar que si

$$a - b, a^2 - b^2, a^3 - b^3, a^4 - b^4, \ldots$$

son todos enteros, entonces a y b son también enteros.

Problema 8.13 Hallar los últimos dos dígitos de 3^{100}.

Pista: Demuestre primero que $3^{20} \equiv 1 \bmod 100$.

Problema 8.14 (AHSME 1992) ¿Cuál es el tamaño del subconjunto mayor S de $\{1, 2, \ldots, 50\}$ tal que ningún par de elementos distintos de S tenga una suma divisible por 7?

Problema 8.15 Demostrar que la ecuación $x^2 - 7y = 3$ no tiene soluciones enteras.

Problema 8.16 Demostrar que si $7|a^2 + b^2$ entonces $7|a$ y $7|b$.

Problema 8.17 Demostrar que no hay enteros con

$$800000007 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Problema 8.18 Demostrar que la suma de los dígitos, en notación decimal, de un cuadrado, no puede ser igual a 1991.

Problema 8.19 Demostrar que

$$7|4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$$

para todos los números naturales n.

Problema 8.20 ¿Cuántos cuadrados hay mod 2^n?

Problema 8.21 Demostrar que los no-múltiplos de 3 son potencias de 2 mod 3^n.

Problema 8.22 (USAMO 1986) ¿Cuál es el menor entero $n > 1$, para el cual

$$\left(\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n}\right)^{1/2}$$

es un entero?

Problema 8.23 Hallar todos los enteros $a, b, a > 1$ y todos los primos p, q, r que satisfacen la ecuación

$$p^a = q^b + r^a$$

$(a, b, p, q, r$ no son necesariamente diferentes).

Problema 8.24 Si $n > 1$ es un entero, demostrar que $n^n - n^2 + n - 1$ es divisible por $(n-1)^2$.

Problema 8.25 (PUTNAM 1952) Sea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

un polinomio de grado n con coeficientes enteros. Si a_0, a_n y $f(1)$ son todos nones, demostrar que $f(x) = 0$ no tiene raíces racionales.

Problema 8.26 (AHSME 1991) Un entero de n dígitos es *lindo* si sus n dígitos son una permutación del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ y sus primeros k dígitos forman un entero que es divisible por k para toda $k, 1 \leq k \leq n$. Por ejemplo, 321 es lindo de tres dígitos ya que 1 divide a 3, 2 divide a 32 y 3 divide a 321. ¿Cuántos enteros lindos de seis dígitos hay?

Respuesta: 2.

Problema 8.27 Un viejo recibo está algo borroso. Dice que 88 pollos costaban un total de \$x4.2y, donde x, y son dígitos ilegibles. ¿Cuánto costaba cada pollo?

Respuesta: 73 centavos.

Problema 8.28 Demostrar que un entero que consiste de 3^n dígitos idénticos es divisible por 3^n.

Capítulo 9

Polinomios

Recordemos que un polinomio es una expresión de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Aquí los *coeficientes* a_k de $p(x)$ pueden ser cualquier número complejo. Si las a_k's pertenecen exclusivamente al conjunto de los números enteros diremos que $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Si las a_k's son números reales entonces escribiremos $p(x) \in \mathbf{R}[x]$. Finalmente, escribiremos $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ si las a_k's son números complejos.

Ejemplo 9.0.93 Hallar la suma de todos los coeficientes obtenidos luego de expandir y simplificar el producto

$$(1 - x^2 + x^4)^{109}(2 - 6x + 5x^9)^{1996}.$$

Solución: Pongamos

$$p(x) = (1 - x^2 + x^4)^{109}(2 - 6x + 5x^9)^{1996}.$$

Vemos que $p(x)$ un polinomio de grado $4 \cdot 109 + 9 \cdot 1996 = 18400$. Así pues, $p(x)$ es también la expresión

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{18400}x^{18400}.$$

Vemos entonces que la suma de los coeficientes de $p(x)$ es

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{18400},$$

que también es $p(1) = (1 - 1^2 + 1^4)^{109}(2 - 6 + 5)^{1996} = 1$. Así pues, la suma deseada es igual a 1.

Ejemplo 9.0.94 Póngase

$$(1+x^4+x^8)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{800}x^{800}.$$

Hallar:
(A) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{800}$.
(B) $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{800}$.
(C) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{799}$.
(D) $a_0 + a_4 + a_8 + a_{12} + \cdots + a_{800}$.
(E) $a_1 + a_5 + a_9 + a_{13} + \cdots + a_{797}$.

Solución: Pongamos

$$p(x) = (1+x^4+x^8)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{800}x^{800}.$$

Entonces
(A)

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{800} = p(1) = 3^{100}.$$

(B)

$$a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{800} = \frac{p(1)+p(-1)}{2} = 3^{100}.$$

(C)

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{799} = \frac{p(1)-p(-1)}{2} = 0.$$

(D)

$$a_0 + a_4 + a_8 + a_{12} + \cdots + a_{800} = \frac{p(1)+p(-1)+p(i)+p(-i)}{4} = 2 \cdot 3^{100}.$$

(E)

$$a_1 + a_5 + a_9 + a_{13} + \cdots + a_{797} = \frac{p(1)-p(-1)-ip(i)+ip(-i)}{4} = 0.$$

Otra propiedad de los polinomios que es a menudo útil es el algoritmo de división: si dividimos $p(x)$ por $a(x)$ obtendremos polinomios $q(x), r(x)$ con

$$p(x) = a(x)q(x) + r(x).$$

Aquí $0 \leq$ grado $r(x) <$ grado $a(x)$. Por ejemplo, al dividir x^5+x^4+1 por x^2+1 obtenemos

$$x^5 + x^4 + 1 = (x^3+x^2-x-1)(x^2+1) + x + 2,$$

de donde el cociente es $q(x) = x^3+x^2-x-1$ y el residuo es $r(x) = x+2$.

Ejemplo 9.0.95 Hallar el residuo cuando $(x+3)^5+(x+2)^8+(5x+9)^{1997}$ se divide por $x+2$.

Solución: Como estamos dividiendo por un polinomio de grado 1, el residuo es un polinomio de grado 0, es decir, una constante. Así pues, existe un polinomio $q(x)$ y una constante r con

$$(x+3)^5+(x+2)^8+(5x+9)^{1997}=q(x)(x+2)+r$$

Si ponemos $x=-2$ obtenemos

$$0=(-2+3)^5+(-2+2)^8+(5(-2)+9)^{1997}=q(-2)(-2+2)+r=r,$$

de donde el residuo es $r=0$.

Ejemplo 9.0.96 Un polinomio deja residuo -2 cuando se divide por $x-1$ y residuo -4 cuando se divide por $x+2$. Hallar el residuo cuando este polinomio se divide por x^2+x-2.

Solución: De la información dada existen polinomios $q_1(x), q_2(x)$ con $p(x)=q_1(x)(x-1)-2$ y $p(x)=q_2(x)(x+2)-4$. Luego $p(1)=-2$ y $p(-2)=-4$. Ahora bien, como $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ es un polinomio de grado 2, el residuo $r(x)$ al dividir $p(x)$ por x^2+x-1 es de grado 1 o menor, es decir $r(x)=ax+b$ para constantes a, b que debemos determinar. Por el algoritmo de división

$$p(x)=q(x)(x^2+x-1)+ax+b.$$

Luego

$$-2=p(1)=a+b$$

y

$$-4=p(-2)=-2a+b.$$

De estas ecuaciones vemos que $a=2/3, b=-8/3$. Luego el residuo es $r(x)=2x/3-8/3$.

Ejemplo 9.0.97 Sea $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$. Hallar el residuo cuando $f(x^5)$ se divide por $f(x)$.

Solución: Observe que $f(x)(x-1)=x^5-1$ y

$$f(x^5)=x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1=(x^{20}-1)+(x^{15}-1)+(x^{10}-1)+(x^5-1)+5.$$

Cada sumando en paréntesis es divisible por $x^5 - 1$ y por ende por $f(x)$. Luego el residuo es 5.

El algoritmo de división nos ayuda a demostrar el siguiente resultado, a menudo conocido como el Teorema del factor.

Teorema 9.0.6 Teorema del factor El polinomio $p(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si $p(a) = 0$.

Demostración Como $x - a$ es un polinomio de grado 1, el residuo al dividir $p(x)$ por $x - a$ es un polinomio de grado 0, es decir, una constante. Así

$$p(x) = q(x)(x - a) + r.$$

De aquí $p(a) = q(a)(a - a) + r = r$. El teorema se deduce de esto.

Ejemplo 9.0.98 Si $p(x)$ un polinomio cúbico con $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5$. Hallar $p(6)$.

Solución: Pongamos $g(x) = p(x) - x$. Entonces $g(x)$ es un polinomio de grado 3 y $g(1) = g(2) = g(3) = 0$. Luego $g(x) = c(x-1)(x-2)(x-3)$ para alguna constante c que debemos determinar. Pero $g(4) = c(4-1)(4-2)(4-3) = 6c$ y $g(4) = p(4) - 4 = 1$, de donde $c = 1/6$. Finalmente

$$p(6) = g(6) + 6 = \frac{(6-1)(6-2)(6-3)}{6} + 6 = 16.$$

Ejemplo 9.0.99 El polinomio $p(x)$ tiene coeficientes enteros y $p(x) = 7$ para cuatro valores enteros diferentes de x. Demostrar que $p(x) \neq 14$ para ningún entero x.

Solución: El polinomio $g(x) = p(x) - 7$ se anula para cuatro enteros diferentes a, b, c, d. Luego, por el Teorema del factor,

$$g(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)q(x),$$

para algún polinomio $q(x)$ con coeficientes enteros. Supongamos que $p(t) = 14$ para algún entero t. Entonces $g(t) = p(t) - 7 = 14 - 7 = 7$. De aquí

$$7 = g(t) = (t - a)(t - b)(t - c)(t - d)q(t),$$

esto es, hemos factorizado a 7 como el producto de al menos cuatro factores enteros distintos, lo que es imposible, pues 7 es a lo sumo $7(-1)1$ el producto de tres enteros distintos. De esta contradicción colegimos que no existe tal entero t.

Ejemplo 9.0.100 Hallar un polinomio cúbico $p(x)$ que se anule cuando $x = 1, 2, 3$ y que satisfaga $p(4) = 666$.

Solución: El polinomio debe tener la forma $p(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$, donde a es una constante. Como $666 = p(4) = a(4-1)(4-2)(4-3) = 6a$, $a = 111$. Luego el polinomio deseado es $p(x) = 111(x-1)(x-2)(x-3)$.

Ejemplo 9.0.101 Hallar un polinomio cúbico $p(x)$ con $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5$.

Solución: Utilizaremos el siguiente método debido a Lagrange. Sea

$$p(x) = a(x) + 2b(x) + 3c(x) + 5d(x),$$

donde $a(x), b(x), c(x), d(x)$ son polinomios cúbicos con las siguientes propiedades: $a(1) = 1$ y $a(x)$ se anula para $x = 2, 3, 4$; $b(2) = 1$ y $b(x)$ se anula cuando $x = 1, 3, 4$; $c(3) = 1$ y $c(3) = 1$ se anula para $x = 1, 2, 4$ y $d(4) = 1$, $d(x)$ anulándose cuando $x = 1, 2, 3$.

Utilizando el método del problema anterior hallamos

$$a(x) = -\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{6},$$

$$b(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2},$$

$$c(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{2}$$

y

$$d(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}.$$

Así

$$\begin{aligned} p(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x-2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) \\ -\frac{3}{2} \cdot (x-1)(x-2)(x-4) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3). \end{aligned}$$

El lector podrá verificar que este polinomio cumple con las condiciones estipuladas.

Por último discutiremos las fórmulas de Viète y las identidades de Newton-Girard. Para introducir el tópico consideremos primero el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.0.102 Hallar el producto

$$(x+1)(x-2)(x+4)(x-5)(x+6).$$

Solución: Vemos que el producto es un polinomio de grado 5. Para obtener el coeficiente de x^5 tomamos una x de cada binomio. Así pues el coeficiente de x^5 es 1. Para formar el término de x^4 tomamos una x de cuatro de los binomios y una constante del binomio restante. Así pues, el coeficiente de x^4 es

$$1-2+4-5+6=4.$$

Para formar el término de x^3 tomamos tres x de tres de los binomios y dos constantes de los dos binomios restantes. Así el coeficiente de x^3 es

$$(1)(-2)+(1)(4)+(1)(-5)+(1)(6)+(-2)(4)+(-2)(-5)+(-2)(6)$$

$$+(4)(-5)+(4)(6)+(-5)(6)=-33.$$

De manera semejante, el coeficiente de x^2 es

$$(1)(-2)(4)+(1)(-2)(-5)+(1)(-2)(6)+(1)(4)(-5)+(1)(4)(6)+(-2)(4)(-5)$$

$$+(-2)(4)(6)+(4)(-5)(6)=-134$$

y el coeficiente de x es

$$(1)(-2)(4)(-5)+(1)(-2)(4)(6)+(1)(-2)(-5)(6)+(1)(4)(-5)(6)+(-2)(4)(-5)(6)=172.$$

Finalmente, el término constante es $(1)(-2)(4)(-5)(6)=240$. El producto pedido es entonces

$$x^5+4x^4-33x^3-134x^2+172x+240.$$

Del ejemplo anterior vemos que cada término tiene un "peso" de 5, pues de cada uno de los cinco binomios o bien tomamos el término de x o bien tomamos la constante.

Si $a_0 \neq 0$ y

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

es un polinomio con raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ entonces podemos escribir

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n).$$

De esto deducimos las *fórmulas de Viète:*

$$-\frac{a_1}{a_0} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \sum_{1\leq j<k\leq n} \alpha_j\alpha_k,$$

$$-\frac{a_3}{a_0} = \sum_{1\leq j<k<l\leq n} \alpha_j\alpha_k\alpha_l,$$

$$\frac{a_4}{a_0} = \sum_{1\leq j<k<l<s\leq n} \alpha_j\alpha_k\alpha_l\alpha_s,$$

....

....

....

$$(-1)^n\frac{a_n}{a_0} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

Ejemplo 9.0.103 Hallar la suma de las raíces, la suma de las raíces tomadas de dos en dos, la suma de los cuadrados de las raíces y la suma de los recíprocos de las raíces de la ecuación

$$2x^3 - x + 2 = 0.$$

Solución: Sean a, b, c las raíces de $2x^3 - x + 2 = 0$. Por las fórmulas de Viète la suma de las raíces es

$$a + b + c = -\frac{0}{2} = 0$$

y la suma de las raíces tomadas de dos en dos es

$$ab + ac + bc = \frac{-1}{2}.$$

Para hallar $a^2+b^2+c^2$ recurrimos a la siguiente identidad

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc).$$

Luego

$$a^2+b^2+c^2=0^2-2(-1/2)=1.$$

Finalmente, como $abc=-2/2=-1$, vemos que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{-1/2}{-1}=1/2.$$

Ejemplo 9.0.104 Sean α,β,γ las raíces de $x^3-x^2+1=0$. Hallar

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}.$$

Solución: De $x^3-x^2+1=0$ deducimos $1/x^2=1-x$. Luego

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=(1-\alpha)+(1-\beta)+(1-\gamma)=3-(\alpha+\beta+\gamma)=3-1=2.$$

Conjunto con las fórmulas de Viète tenemos las *identidades de Newton-Girard* para las sumas de potencias $s_k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots+\alpha_n^k$ de las raíces:

$$a_0s_1+a_1=0,$$

$$a_0s_2+a_1s_1+2a_2=0,$$

$$a_0s_3+a_1s_2+a_2s_1+3a_3=0,$$

etc..

Ejemplo 9.0.105 Si a, b , c son las raíces de $x^3-x^2+2=0$, hallar

$$a^2+b^2+c^2$$

$$a^3+b^3+c^3$$

y

$$a^4+b^4+c^4.$$

Solución: Primero observamos que

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 1^2 - 2(0) = 1.$$

Como $x^3 = x^2 - 2$, obtenemos

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2 - 2 = a^2 + b^2 + c^2 - 6 = 1 - 6 = -5.$$

Finalmente, de $x^3 = x^2 - 2$ obtenemos $x^4 = x^3 - 2x$, de donde

$$a^4+b^4+c^4 = a^3-2a+b^3-2b+c^3-2c = a^3+b^3+c^3-2(a+b+c) = -5-2(1) = -7.$$

Ejemplo 9.0.106 (USAMO 1973) Determine todas las soluciones, reales o complejas del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3. \end{aligned}$$

Solución: Sean x, y, z las raíces del polinomio

$$p(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz.$$

Ahora bien, $xy+yz+zx = (x+y+z)^2/2-(x^2+y^2+z^2)/2 = 9/2-3/2 = 3$ y de

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

se desprende que $xyz = 1$. Luego

$$p(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t - 1)^3.$$

Luego $x = y = z = 1$ es la única solución del sistema anterior.

Problemas

Problema 9.1 Sea

$$(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n}.$$

Hallar

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}.$$

Problema 9.2 Demostrar que las tres raíces de $x^3 - 1 = 0$ son $\omega = 1/2 + i\sqrt{3}/2, \omega^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ y $\omega^3 = 1$. Demostrar que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Problema 9.3 Sea

$$(1 + x^2 + x^4)^{100} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{400} x^{400}.$$

Hallar

$$a_0 + a_3 + a_6 + \cdots + a_{399}.$$

Problema 9.4 El polinomio $p(x)$ satisface $p(-x) = -p(x)$. Cuando $p(x)$ es dividido por $x - 3$ el residuo es 6. ¿Cuál es el residuo cuando $p(x)$ es dividido por $x^2 - 9$?

Problema 9.5 La ecuación $x^4 - 16x^3 + 94x^2 + px + q = 0$ tiene dos raíces dobles. Hallar $p + q$.

Problema 9.6 (USAMO 1984) El producto de dos de las raíces de

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$$

es -32. Determine el valor de k.

Problema 9.7 Si $p(x)$ es un polinomio de grado n tal que $p(k) = 1/k, k = 1, 2, \ldots, n + 1$, hallar el valor de $p(n + 2)$.

Problema 9.8 Suponga que

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = (x + r_1)(x + r_2) \cdots (x + r_n)$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son números reales. Demuestre que

$$(n - 1)a_1^2 \geq 2n a_2.$$

Problema 9.9 Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100}$ son las raíces de

$$x^{100} - 10x + 10 = 0,$$

hallar la suma

$$\alpha_1^{100} + \alpha_2^{100} + \cdots + \alpha_{100}^{100}.$$

Problema 9.10 Hallar un polinomio $p(x)$ de grado 4 con $p(1) = -1, p(2) = 2, p(-3) = 4, p(4) = 5, p(5) = 8$.

Problema 9.11 Sean α, β, γ las raíces de $x^3 - x - 1 = 0$. Halle

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}$$

y

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5.$$

Problema 9.12 Los números reales α, β safisfacen

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0,$$

$$\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0.$$

Halle el valor de $\alpha + \beta$.

Capítulo 10

Conteo

A continuación mostraremos algunas de las técnicas principales de conteo.

Ejemplo 10.0.107 Se marcan n puntos, $1, 2, \dots, n$ sobre una circunferencia, que colocamos a igual distancia unos de los otros. Si el punto marcado 15 está directamente opuesto al marcado 49, ¿cuántos puntos hay en total?

Solución: Los puntos 16, 17, ..., 48 son 33 en total y están del mismo lado del diámetro que une al punto 15 con el 49. Para cada uno de estos hay un punto correspondiente y opuesto en la circunferencia. Así pues hay un total de $2 \cdot 33 + 2 = 68$ puntos en total.

Ejemplo 10.0.108 ¿Cuántos de los factores de 2^{95} hay que sean mayores que $1,000,000$?

Solución: Los factores de 2^{95} son $1, 2, 2^2, \dots, 2^{95}$. Observemos que $2^{10} = 1024$ y por lo tanto $2^{20} = 1048576$. Luego $2^{19} = 524288 < 1000000 < 1048576 = 2^{20}$. Por lo tanto, son los factores $2^{20}, 2^{21}, \dots 2^{95}$ los mayores de 1000000. Estos constituyen un total de $95 - 20 + 1 = 76$ factores.

Ejemplo 10.0.109 ¿Cuántos divisores positivos tiene $2^8 3^9 5^2$? ¿Cuál es la suma de estos divisores?

Solución: Presumiremos conocido el que los enteros naturales se pueden factorizar en factores primos de una manera única. Entonces pues, al expandir el producto

$$(1+2+2^2+\cdots+2^8)(1+3+3^2+\cdots+3^9)(1+5+5^2)$$

obtenemos todos los factores de $2^8 3^9 5^2$ y sólo factores de este número. Así pues, hay tantos factores como términos en el producto. Por lo tanto, hay $(1+8)(1+9)(1+3) = 320$ factores.

La suma de los divisores la obtenemos sumando las tres series geométricas anteriores:

$$\frac{2^9-1}{2-1} \cdot \frac{3^{10}-1}{3-1} \cdot \frac{5^3-1}{5-1} = 467689684.$$

En general, si $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$, donde las p's son primos distintos y si $d(n), \sigma(n)$ denotan, el respectivamente, el número de divisores positivos de n y la suma de los divisores positivos de n, el razonamiento anterior nos dice que

$$d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_s+1)$$

y

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_s^{a_s+1}-1}{p_s-1}.$$

Ejemplo 10.0.110 Para escribir un libro se utilizaron 1890 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Solución: Para escribir las primeras nueve páginas, se utilizaron nueve dígitos. Para escribir las $99-10+1=90$ páginas entre la 10 y 99 inclusas, se utilizaron $2 \cdot 90 = 180$ dígitos. Hasta ahora hemos utilizado 189 dígitos. Si el libro llegase hasta la página 999, las $999-100+1=900$ páginas de tres dígitos utilizarían $3 \cdot 900 = 2700$ dígitos, que es mucho más que la cantidad de dígitos prescrita. Así pues, el número de páginas es un número de tres dígitos. Nos quedan $1890-189=1701$ dígitos que usar, que nos dan para $1701/3=567$ páginas más. Así pues, contamos 567 páginas a partir de la 100. Esto quiere decir que el libro tiene 666 páginas.

Ejemplo 10.0.111 Todos los enteros positivos se escriben en sucesión

$$123456789101112131415161718192021222324\ldots$$

¿Qué dígito ocupa el 206790avo lugar?

Solución: Observemos que

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 9000 = 38819$$

y que

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 9000 + 5 \cdot 90000 = 488819.$$

Por lo tanto, el dígito buscado está entre los números de cinco dígitos. Si $5x+38819 \geq 206790$, entonces $x \geq 33595$ (el entero x es cuánto nos adentramos en los números de cinco dígitos). Así pues, para llegar hasta el 206790avo dígito debemos de ir hasta el 33595avo número de cinco dígitos, es decir 43594 (el primero es 10000). Luego, hasta el dígito final de 43594 (el 4 de las unidades) hemos utilizado $38819 + 5 \cdot 33595 = 206794$ dígitos. Luego, el 4 ocupa la posición 206794ava, el 9 la 206793ava, el 5 la 206792ava, el 3 la 206791ava y el 4 la 206790ava. El dígito requerido es el 4.

Ejemplo 10.0.112 De 40 personas, 28 fuman y 16 mascan tabaco. Además, se sabe que 10 tanto fuman como mascan tabaco. ¿Cuántas personas ni fuman ni mascan tabaco?

Solución: Utilizaremos un método conocido como el *principio de inclusión-exclusión*. Si X es un conjunto finito, denotaremos por $|X|$ su cardinalidad, esto es, el número de elementos que hay en el conjunto. Sea A el conjunto de personas que fuman y B el conjunto de personas que mascan tabaco. Como $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 28 + 16 - 10 = 34$, hay 34 personas o que fuman o que mascan tabaco. Por lo tanto, el número de personas que ni fuma ni masca tabaco es $40 - 34 = 6$.

Ejemplo 10.0.113 Cuatrocientos niños forman un círculo y los numeramos $1, 2, \ldots,$ 400. Sea $k, 1 \leq k \leq 400$ un entero fijo. Marcamos cada k niños deteniéndonos cuando marcamos a un niño por segunda vez. Por ejemplo, si $k = 6$, comenzamos marcando los ninõs $6, 12, 18, \ldots, 396$. Luego nos toca marcar al niño 2, pues el sexto luego 396 es el 2. Seguimos marcando a los niños $8, 14, 20, \ldots, 398$. Nos toca ahora marcar a los niños $4, 10, 16, \ldots, 400$. El próximo niño a marcar es el sexto, que lo marcamos pues por segunda vez. Notamos que dejamos sin marcar a los niños $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots 399$—esto es, los enteros de la forma $6k \pm 1, 6k + 3$ entre 1 y 400. ¿Para cuántos valores de k serán marcados todos los niños al menos una vez?

Solución: Vemos que si k tiene un factor mayor que 1 en común con 400, entonces no marcamos a todos los niños. Así pues, las k's requeridas son aquellas k's entre 1 y 400 inclusive que son relativamente primas a 400. Ahora bien, $400 = 2^4 5^2$. Para contar las k's que no tienen factores primos en común con 400, contaremos las que sí tienen factores en común con 400 y las restaremos a 400. Sea A el conjunto los múltiplos de 2 en $\{1, 2, 3, \ldots, 400\}$ y B el conjunto de múltiplos de 5 en $\{1, 2, 3, \ldots, 400\}$. Por inclusión- exclusión $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Ahora bien,

$$|A| = \left[\frac{400}{2}\right] = 200, \; |B| = \left[\frac{400}{5}\right] = 80, \; |A \cap B| = \left[\frac{400}{10}\right] = 40.$$

Luego $|A \cup B| = 240$ enteros en $\{1, 2, \ldots 400\}$ no son relativamente primos a 400 y $400 - 240 = 160$ lo son. Así pues, sólo 160 k's provocan que todos los niños sean marcados.

Sea $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$, donde las p's son primos distintos. Si $\phi(n)$ denota el número de enteros k, $1 \leq k \leq n$ relativamente primos a n, entonces por inclusión-exclusión se puede demostrar que

$$\phi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2 - 1}) \cdots (p_s^{a_s} - p_s^{a_s - 1}).$$

Utilizando la asociatividad de las reuniones, obtenemos la fórmula de inclusión-exclusión para tres conjuntos:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| \\
&= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\
&= |A| + |B \cup C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| \\
&\quad - (|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|) \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| \\
&\quad - (|A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| \\
&\quad + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}$$

Ejemplo 10.0.114 De 200 políticos entrevistados en la legislatura, 75 usan cocaína, 85 usan heroína y 100 utilizan barbitúricos. Entre los 200, 30 usan cocaína y heroína, 50 usan heroína y barbitúricos y 40 utilizan cocaína y barbitúricos. Finalmente, 10 indulgen en el uso de las tres substancias. ¿Cuántos de estos 200 políticos no usan drogas?

Solución: Sean A, B, C el conjunto de políticos entre los 200 que utilizan cocaína, heroína y barbitúricos, respectivamente. Se nos es dado que $|A| = 75, |B| = 85, |C| = 100, |A \cap B| = 30, |B \cap C| = 50, |C \cap A| = 40, |A \cap B \cap C| = 10$. Por el principio de inclusión-exclusión

$$|A \cup B \cup C| = 75 + 85 + 100 - 30 - 50 - 40 + 10 = 150$$

políticos utilizan al menos una droga. Luego, $200 - 150 = 50$ no utilizan ninguna droga.

Ejemplo 10.0.115 ¿Cuántos enteros del 1 al 1000000 tienen al menos un 1 en su expansión decimal?

Solución: Analizaremos los enteros del 0 al 999999. Al resultado final le sumaremos 1, ya que 1000000 tiene un 1 en su expansión.

Dividamos este conjunto de un millón de enteros como sigue: en 100000 decenas

$$\{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$\{10, 11, 12, \dots, 19\}$$

$$\vdots$$

$$\{999990, 999991, \dots, 999999\}.$$

En 10000 centenas

$$\{0, 1, 2, \dots, 99\}$$

$$\{100, 101, 102, \dots, 199\}$$

$$\vdots$$

$$\{999900, 999901, \dots, 999999\},$$

etc., hasta llegar a diez 100000enas

$$\{0, 1, 2, \dots, 99999\}$$

$$\{100000, 100001, 100002, \dots, 199999\}$$

$$\vdots$$

$$\{900000, 900001, \dots, 999999\}.$$

En la primera decena hay solamente un número, el 1, que tiene un 1 en su numeración decimal. En la segunda decena, los diez enteros tienen un 1 en su numeración decimal.

En la primera centena, cada decena, excepto la segunda, contendrá exactamente un entero que tiene un 1 en su expansión. La segunda decena, claro está, tiene sus diez enteros con 1's en sus expansiones. En consecuencia, la primera centena tiene

$$10 + 9 \cdot 1$$

enteros que tienen el 1 en sus expansiones.

En el primer millar, cada centena excepto la segunda tendrá exactamente $10 + 9 \cdot 1$ enteros con el 1 en su expansión. La segunda centena, que consiste de los enteros $100, 101, \ldots 199$ tendrá sus 100 enteros con el 1 en su expansión. Así pues, el primer millar tendrá exactamente

$$100 + 9(10 + 9 \cdot 1) = 10^2 + 9 \cdot 10 + 9$$

enteros con el 1 en su expansión.

En la primera decena de millar, cada millar excepto el segundo, tendrá exactamente $10^2 + 9 \cdot 10 + 9$ enteros con el 1 en su expansión. El segundo millar tendrá sus 10^3 enteros con el 1 en su expansión. Luego, en la primera decena de millar hay

$$10^3 + 9(10^2 + 9 \cdot 10 + 9) = 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9^2 \cdot 10 + 9^3$$

enteros con el 1 en su expansión.

Un razonamiento semejante nos lleva a concluir que en la primera centena de millar hay $10^4+9(10^3+9\cdot 10^2+9^2\cdot 10+9^3) = 10^4+9\cdot 10^3+9^2\cdot 10^2+9^3\cdot 10+9^4$ enteros con el 1 en su expansión y en los primeros millones hay

$$10^5 + 9 \cdot 10^4 + 9^2 \cdot 10^3 + 9^3 \cdot 10^2 + 9^4 \cdot 10 + 9^5 = \frac{10^6 - 9^6}{10 - 9} = 468559$$

enteros con el 1 en su expansión. Esto quiere decir que en los enteros del 0 al 999999 hay 468559 enteros con el 1 en su expansión y en los enteros del 1 al 1000000 hay $468559 + 1 = 468560$ enteros con el 1 en su expansión.

Problemas

Problema 10.1 Hallar $d(1260)$, $\sigma(1260)$ y $\phi(1260)$.

Problema 10.2 Los enteros del 1 al 1000 se escriben en orden sobre un círculo. Comenzando con 1, cada quinceavo número es marcado (esto es, $1, 16, 31$, etc.). Este proceso se repite hasta que se marque un número por segunda vez. ¿Cuántos números sin marcar quedan?

Respuesta: 800

Problema 10.3 ¿Cuántos enteros entre 1 y 3012 son divisibles por 5 o por 7 pero no por ambos números?

Problema 10.4 Escribir la versión de cuatro conjuntos del principio de inclusión-exclusión.

Problema 10.5 ¿Cuántos números primos hay entre 1 y 100?

Problema 10.6 Sean x, y, z números reales. Demostrar que

$$\max(x, y) = x + y - \min(x, y)$$

y que

$$\max(x, y, z) = x + y + z - \min(x, y) - \min(y, z) - \min(z, x) + \min(x, y, z).$$

¿Qué relación nota entre estas fórmulas y el principio de inclusión-exclusión?

Problema 10.7 ¿Cuántos enteros entre 1 y 1000000 no son ni cuadrados, ni cubos, ni cuartas, ni quintas potencias?

10.1 Permutaciones y combinaciones

Cada uno de los *arreglos* que se puedan hacer tomando algunos o todos los elementos de un conjunto se llama *permutación*. Así las permutaciones que se pueden hacer tomando dos elementos a la vez de $\{1, 2, 3, 4\}$ son doce,

$$12,\ 13,\ 14,\ 23,\ 24,\ 34$$

$$21,\ 31,\ 41,\ 32,\ 42,\ 43$$

Por el principio de multiplicación ya sabíamos de antemano que habían $4 \times 3 = 12$ de estos arreglos. Recalcamos aquí que el orden es de suma importancia.

En general dados n objetos diferentes, el número de permutaciones de n objetos diferentes tomando m a la vez es

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1).$$

Por ejemplo, si tenemos cinco banderas de cinco colores distintos, el número de arreglos que podemos tener al ponerlas las cinco en fila es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Por conveniencia denotaremos por $n!$ (leáse *n factorial*) al producto $n \cdot (n-1) \cdots 1$. Así

$$1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Pondremos por convención $0! = 1$. Nótese que $n! = (n-1)!n$.

Cada uno de los *grupos o selecciones* que se puedan hacer tomando algunos o todos los elementos de un conjunto se llama *combinación*. Así las combinaciones que se pueden hacer tomando dos elementos a la vez de $\{1, 2, 3, 4\}$ son seis,

$$12, \ 13, \ 14, \ 23, \ 24, \ 34$$

Observe que el orden no guarda importancia aquí. ¿Cómo hallar este número sin necesidad de listar todas las opciones? Vemos que si tomamos el orden en consideración obtendremos $4 \cdot 3 = 12$, pero como cada par es puede arreglar entre sí de $2!$ maneras distintas, el número total de selecciones, sin considerar el orden, es $4 \cdot 3/2! = 6$.

En general, el número de seleccionar k objetos distintos de n es

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Ejemplo 10.1.1 ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos tiene el conjunto $\{a, b, c, d, f\}$?

Solución: Vea que aquí el orden carece de importancia. Lo que queremos es el número de maneras de seleccionar tres elementos de cinco, el cual es

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Ejemplo 10.1.2 ¿De cuántas maneras podemos seleccionar un comité de tres personas de entre diez profesores?

Ejemplo 10.1.3 ¿De cuántas maneras podemos seleccionar un comité de siete personas con un presidente de entre veinte personas?

Ejemplo 10.1.4 ¿De cuántas maneras podemos seleccionar un comité de siete personas con un presidente y un secretario de entre veinte personas?

Ejemplo 10.1.5 ¿Cuántas veces está el dígito 3 listado en los números del 1 al 1000?

Ejemplo 10.1.6 Debemos seleccionar un comité de entre nueve mujeres y cinco hombres. El comité deberá tener dos mujeres y tres hombres. ¿De cuántas maneras podemos hacer esto?

Ejemplo 10.1.7 ¿Cuántos entre

$$100,\ 101,\ \ldots,\ 999$$

tienen todos dígitos diferentes y en orden creciente? ¿Diferentes y en orden decreciente?

Ejemplo 10.1.8 ¿De cuántas maneras podemos sentar cuatro pacientes en una sala de espera que tenga doce sillas en fila de tal manera que siempre hayan asientos vacíos entre los pacientes?

Ejemplo 10.1.9 ¿De cuántas maneras podemos distribuir 7 pelotas idénticas en 20 cajas diferentes de tal manera que cada caja contenga a lo sumo una pelota y no haya dos cajas llenas consecutivas?

De la identidad

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

vemos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Esta identidad tiene la siguiente interpretación combinatoria: si hay n pelotas en una bolsa, sacar k de ellas de la bolsa es lo mismo que dejar $n-k$ dentro de la bolsa.

Ejemplo 10.1.10 Dar una interpretación combinatoria para la *identidad de Pascal*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Ejemplo 10.1.11 Dar una interpretación combinatoria para la *identidad de Newton*

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{j-i}.$$

Ejemplo 10.1.12 Explique por qué

$$2^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}.$$

Ejemplo 10.1.13 Explique por qué

$$\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}.$$

Problemas

Problema 10.8 ¿De cuántas maneras diferentes puede un estudiante adivinar un examen completo de verdadero/falso que tenga dieciocho preguntas?

Problema 10.9 En contando el número total de subconjuntos de un conjunto de n elementos, demuestre que

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$