Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

- Se define la Transformada de Laplace de la señal *x(t)*

$$X(s) = \mathrm{L}\{x(t)\} = \int_{0-}^{\infty} x(t)\exp(-st)dt$$

  - La cantidad compleja $s=\sigma+j\omega$. De esta forma se generaliza el concepto de frecuencia en la Transformada de Fourier.
  - Se hace notar que el límite inferior de la integral es 0, lo cual proporciona una misma Transformada para señales causales ya que *x(t)* y *x(t)u(t)* son iguales.
  - La Transformada de Laplace existe si la integral que la define es finita. Para ello se necesita que los valores de σ sean unos concretos, lo que define una región de convergencia de la Transformada de Laplace.
- Con la Transformada de Laplace se generaliza el concepto de función de Transferencia de un sistema a aquellos cuyas condiciones iniciales son no nulas.

Transformada de Laplace

- Transformada Inversa de Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\exp(-st)ds$$

- Propiedades

Superposicion	$\mathrm{L}\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$
$\times - \exp$	$\mathrm{L}\{\exp(-\alpha t)x(t)\} = X(s+\alpha)$
$\times - \cos$	$\mathrm{L}\{\cos(\alpha t)x(t)\} = \frac{1}{2}[X(s+j\alpha) + X(s-j\alpha)]$
$\times - sen$	$\mathrm{L}\{\sin(\alpha t)x(t)\} = j\frac{1}{2}[X(s+j\alpha) - X(s-j\alpha)]$
Escalado	$\mathrm{L}\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha}X\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad \alpha > 0$

Transformada de Laplace

- Propiedades (Continuación)

Desplazamiento $\quad \mathrm{L}\{x(t-\alpha)u(t-\alpha)\} = \exp(-s\alpha)X(s) \quad \alpha > 0$

$\times$ - t $\quad \mathrm{L}\{tx(t)\} = -\dfrac{dX(s)}{ds}$

$$\mathrm{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

Derivada $\quad \mathrm{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0-)$

$$\mathrm{L}\{x^n(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0-) - \cdots - x^{n-1}(0-)$$

Integral $\quad \mathrm{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(t)dt\right\} = \dfrac{X(s)}{s} + \dfrac{A[x(t)](-\infty,0)}{s}$

Transformada de Laplace

- Propiedades (Continuación)

Convolucion $\quad \mathrm{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)Y(s)$

Multiplicacion $\quad \mathrm{L}\{x(t)y(t)\} = \frac{1}{2\pi j} X(s) * Y(s)$

Teorema del valor inicial

$$x(0+) = \lim_{s \to \infty} [sX(s)]$$

Teorema del valor final

$$x(t)\big|_{t \to \infty} = \lim_{s \to 0} [sX(s)]$$

Transformada de Laplace

- De igual manera que en la Transformada de Fourier, podemos obtener la respuesta de un sistema a un señal de entrada *x(t)* a partir sus Transformadas de Laplace:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)H(s)\right\}$$

  - *H(s)* es la función de transferencia del sistema. Podemos determinar la función de transferencia a partir de la ecuación diferencial que describe el sistema

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_{N-1}\frac{dy}{dt} + a_N y = b_0\frac{d^M x}{dt^M} + b_1\frac{d^{M-1}x}{dt^{M-1}} + \cdots + b_{M-1}\frac{dx}{dt} + b_M x$$

Haciendo la transformada de Laplace en ambos miembros y aplicando la propiedad de la derivada para condiciones iniciales cero

$$\left(s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N\right)Y(s) = \left(b_0 s^M + b_1 s^{M-1} + \cdots + b_{M-1}s + b_M\right)X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^M + b_1 s^{M-1} + \cdots + b_{M-1}s + b_M}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N}$$