Tema IV: APLICACIONES Y SUCESIONES

I- Una *aplicación* del conjunto A en el conjunto B es una correspondencia de A en B que asocia a cada elemento de A un elemento de B y uno sólo. Si f es una aplicación de A en B escribiremos

$$f : A \longrightarrow B.$$

De la definición se deduce que si $a \in A$ debe de existir un elemento b en B, y uno sólo, que sea el que corresponde a $a \in A$, este elemento de B lo denotaremos por $f(a)$ y diremos de él que *es la imagen de* a mediante f.

Al conjunto A se le denomina *dominio* de f y al subconjunto de B

$$\{b \,/\, \exists\, a, f(a) = b\}$$

se le denomina *rango* o *imagen* de f y lo denotaremos por rg f ó $f(A)$.

a) Si $f(A) = B$ diremos que f es *suprayectiva, exhaustiva o sobre.*

b) Si dos elementos distintos cualesquiera de A tienen imágenes distintas en B, diremos que f es una aplicación *inyectiva* o 1-1.

c) Si f verifica a) y b) diremos que f es *biyectiva.*

El conjunto de todas las aplicaciones de A en B se denota por B^A.

Si $\qquad f : A \longrightarrow B \qquad$ y $\qquad g : C \longrightarrow D$

$$f = g \quad \Longleftrightarrow \quad A = C,\ B = D \quad \text{y} \quad f(x) = g(x)\ \forall\, x \in A.$$

Por tanto B^A y D^C son disjuntos si $A \neq C$ o $B \neq D$, y dos elementos f y g de B^A son distintos si $\exists\, x \in A$ tal que $f(x) \neq g(x)$.

II- Sean $f : A \longrightarrow B$, $M \subset A$, $D \subset B$.

(a) Al subconjunto de B formado por las imágenes de los elementos de M

$$\{f(x) \,/\, x \in M\}$$

se le denomina imagen de M mediante f y se la denota por $f(M)$.

(b) El subconjunto de A

$$\{x \in A \,/\, f(x) \in D\}$$

recibe el nombre de *contraimagen* de D y se designa por $f^{-1}(D)$.

Si $D = \{y\}$ en vez de poner $f^{-1}(\{y\})$ se suele poner $f^{-1}(y)$.

Notar que si $a \in A$, $f(a)$ es un elemento de B, mientras que si $b \in B$, $f^{-1}(b)$ es un subconjunto de A.

Ejercicios: Sea $f : A \longrightarrow B$.

Probar los siguientes apartados:

1. f es inyectiva sii $\forall\, y \in B \quad f^{-1}(y)$ consta a lo sumo de un elemento.
2. Si $M \subset A$, $M \neq \emptyset \Rightarrow f(M) \neq \emptyset$
3. Si $D \subset B$, siendo $D \neq \emptyset$ puede ocurrir que $f^{-1}(D) = \emptyset$.
4. f es sobre sii $\forall\, D \subset B$, $D \neq \emptyset$, se verifica $f^{-1}(D) \neq \emptyset$.
5. $\forall\, M \subset A$ se verifica $M \subset f^{-1}(f(M))$ y $\forall\, D \subset B \quad f(f^{-1}(D)) \subset D$.

III- Cualquiera que sea el conjunto A, $A \neq \emptyset$, la aplicación

$$id : A \longrightarrow A \qquad \text{tal que} \qquad id(x) = x \quad \forall\, x \in A$$

recibe el nombre de *aplicación identidad* de A.

IV- Sean $M \subset C \subset A$, $f : M \longrightarrow B$, y $g : C \longrightarrow B$ cumpliéndose que $\forall\, x \in M \quad f(x) = g(x)$
diremos que g es *una extensión* de f o bien que f es *la restricción* de g a M, y pondremos $f = g_{\uparrow M}$.

Ejercicio:
Probar que en las condiciones del párrafo anterior, si el complementario de M en C no es vacío y $\mathrm{Card}(B) > 2$ toda aplicación de M en B admite más de una extensión a C.

NOTA: En las condiciones anteriores una aplicación de C en B admite una sola restricción a M, por eso decimos la restricción de g a M. El ejercicio anterior prueba que una aplicación de M en B puede tener más de una extensión a C.

V- Si $f : A \longrightarrow D$ y $g : D \longrightarrow C$

podremos construir una aplicación $\phi : A \longrightarrow C$ tal que

$$\phi(x) = g(f(x)) \qquad \forall\, x \in A$$

esta aplicación ϕ recibe el nombre de *aplicación compuesta* de f y g y se denota por

$$\phi = g \circ f.$$

Ejercicios:
a) Probar que ϕ es efectivamente una aplicación.
b) Probar que si se consideran las aplicaciones anteriores y otra $h : C \longrightarrow M$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

cualesquiera que sean A, B, C, M y f, g, h.

La igualdad anterior suele expresarse diciendo que la composición de aplicaciones goza de la propiedad asociativa.

VI- Si B es un subconjunto de $\mathbf{R}^m$, o de $\mathbf{C}^m$, las aplicaciones de A en B suelen denominarse *funciones* de A en B, independientemente de la naturaleza de A.

Ahora bien, es corriente en Matemáticas llamar función de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$ a toda aplicación de cualquier subconjunto de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$. Por este motivo cuando hablemos de una función de este tipo hemos de estudiar primeramente cuál es su dominio y pueden presentarse dos casos:

1) El dominio venga dado explícitamente.

2) Haya que buscarlo, en cuyo caso se sobreentiende que es el mayor subconjunto de $\mathbf{R}^n$ en el cual tiene sentido la expresión por la cual, generalmente,

viene dada la función.

ESPACIO DE LAS APLICACIONES DE A EN $\mathbf{R}^m$.

Sean $f : A \longrightarrow K$ y $g : B \longrightarrow K$, si en K hay definida una ley de composición interna $*$ a partir de f y g es posible definir una aplicación ψ cuyo dominio es $A \cap B$ definida mediante la expresión:

$$\psi(x) = f(x) * g(x) \qquad \forall\, x \in A \cap B$$

y se denota $\psi = f * g$.

Análogamente si en K hay definida una ley de composición externa cuyo conjunto de operadores es un conjunto M, para cada $f : A \longrightarrow K$ y cada $\lambda \in M$ se puede definir una aplicación ϕ de A en K mediante la expresión:

$$\phi(x) = \lambda\, f(x)$$

a la cual la denotaremos por $\phi = \lambda\, f$.

Ejercicio: Probar que ψ y ϕ definidas en los párrafos anteriores son efectivamente aplicaciones de sus dominios correspondientes en K.

Así, como en $\mathbf{R}^m$ tenemos definidas:

a) Una ley de composición interna que llamamos suma (+) tal que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) + (y_1, y_2, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m)$$

b) Una ley de composición externa cuyo conjunto de operadores es $\mathbf{R}$, tal que

$$\lambda\,(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \ldots, \lambda\, x_m)$$

las observaciones anteriores nos permiten dar las dos definiciones siguientes:

DEFINICION 1:

Sean $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$ y $g : B \longrightarrow \mathbf{R}^m$, a la aplicación

$$S : A \cap B \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

tal que

$$S(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall\, x \in A \cap B$$

la denominaremos suma de las aplicaciones f y g y la denotaremos por $f+g$.

DEFINICION 2:

Si $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$ a la aplicación

$$g : A \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

tal que

$$g(x) = \lambda\, f(x) \qquad \forall\, x \in A$$

la designaremos por $g = \lambda\, f$.

Ejercicios:
1) Probar que si $B \subset \mathbf{R}^m$ siendo $B \neq \mathbf{R}^m$, y $f, g \in B^A$ puede que la función $f + g$ no sea una aplicación de A en B.
2) Probar que con las operaciones dadas en las dos definiciones anteriores el conjunto de las funciones de A en $\mathbf{R}^m$ constituye un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$.

Si $m = 1$ es posible además establecer las siguientes

DEFINICION 3:

Si $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbf{R}$ la aplicación

$$p : A \cap B \longrightarrow \mathbf{R}$$

tal que

$$p(x) = f(x)\; g(x) \qquad \forall\, x \in A \cap B$$

recibe el nombre de aplicación producto de f y g y se denota por $p = f.g$.

El conjunto de las aplicaciones de A en $\mathbf{R}$ con las operaciones que acabamos de dotarle tiene estructura de *álgebra*.

DEFINICION 4:

Si $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbf{R}$ la aplicación

$$c : A \cap B \longrightarrow \mathbf{R}$$

tal que

$$c(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall\, x \in A \cap B - \{x \,|\, g(x) \neq 0\}$$

recibe el nombre de aplicación cociente de f entre g y se designa por f/g.

NOTA: No confundir la aplicación p de la definición 3, con la composición de aplicaciones.

SUCESIONES DE NUMEROS REALES

DEFINICION:

Toda aplicación $\phi : \mathbf{N}^* \longrightarrow A$ se denomina sucesión de elementos de A.

En este tema siempre que pongamos $\mathbf{N}$, nos estaremos refiriendo a $\mathbf{N}^*$. Si $A = \mathbf{R}$ la sucesión será de números reales.

Establecido el conjunto de llegada de la sucesión ϕ, podemos establecer ésta mediante las imágenes de los elementos de $\mathbf{N}$ mediante ϕ, que es como se acostumbra a denotar una sucesión:

$$\phi \equiv a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

abreviadamente

$$\phi \equiv (a_n)_{n \in N} \qquad \text{o simplemente} \qquad (a_n) \qquad \text{donde} \qquad a_n = \phi(n).$$

A cada elemento a_n se le denomina *término* de la sucesión. Así en una sucesión habrá un primer término, un segundo término, etc.

Notar que toda sucesión (a_n) de las que estamos considerando tiene infinitos términos, sin embargo el rango de la sucesión puede ser finito como ocurre en la sucesión

$$\psi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R} \qquad \text{tal que} \qquad \psi(n) = 1 \quad \forall\, n$$

esta sucesión, que con nuestra notación sería:

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots = (1)_{n \in N}$$

posee por rango el conjunto $\{1\}$.

Al rango de una sucesión (a_n), a veces lo denotaremos por $\{(a_n)\}$ o abreviadamente $\{a_n\}$ si no da lugar a confusión, y lo llamaremos *conjunto de los elementos de la sucesión.*

Lo que acabamos de decir pone de manifiesto la importancia de no olvidar que una sucesión es una aplicación y no un conjunto de elementos.

Dadas dos sucesiones de elementos en A

$$\phi : N \longrightarrow A \qquad , \qquad \psi : N \longrightarrow A$$

como los conjuntos de partida y llegada coinciden en ambas

$$\phi \neq \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, m \quad \text{tal que} \quad \phi\,(m) \neq \psi\,(m)$$

es decir si

$$\begin{array}{rcl} \phi & = & a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots \\ \psi & = & b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots \\ \phi & \neq & \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, m \,/\, a_m \neq b_m \end{array}$$

Así las sucesiones:

$$\begin{array}{rcl} (a_n) & \equiv & 1, 2, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \\ (b_n) & \equiv & 2, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \end{array}$$

son distintas ya que $a_1 = 1$ mientras que $b_1 = 2$, sin embargo:

$$\{(a_n)\} = \{(b_n)\} = \{1, 2\}$$

ALGUNOS TIPOS IMPORTANTES DE SUCESIONES REALES

DEFINICION 1:

La sucesión (a_n) es *monótona creciente* (resp. monótona decreciente) si $n < m \implies a_n \leq a_m$ (resp. $\implies a_n \geq a_m$).

DEFINICION 2:

La sucesión (a_n) es *estrictamente creciente* (respectivamente decreciente) si $n < m \implies a_n < a_m$ (resp. $\implies a_n > a_m$).

DEFINICION 3:

(a_n) es *estacionaria* si existe un $n_o \in N$ tal que $\forall\, m, n > n_o \Rightarrow a_m = a_n$.

Notar que esta última definición indica que existe un término a partir del cual todos toman el mismo valor.

DEFINICION 4:

(a_n) está *acotada superiormente* (resp. inferiormente) $\iff \{a_n\}$ está acotado superiormente (resp. inferiormente).

DEFINICION 5:

(a_n) está *acotada* si lo está el conjunto $\{a_n\}$.

Notar que las definiciones anteriores serían válidas para toda sucesión con elementos en un conjunto A cualquiera si en A hay establecido un orden.

La definición 5 no precisa siquiera que A esté dotado de un orden, bastaría por ejemplo que en A hubiese definida una métrica.

DEFINICION 6:

Sea $f \equiv (a_n)$ una sucesión y $g : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ estrictamente creciente. Consideremos la aplicación:

$$f \circ g : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{N} & \xrightarrow{g} & \mathbf{N} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ k & \longrightarrow & n_k & \longrightarrow & a_{n_k} \end{array}$$

a esta aplicación se le denomina subsucesión de la sucesión (a_n).

Así la sucesión

$$(b_n) \equiv 1, 1/3, \ldots, 1/(2n+1), \ldots$$

es una subsucesión de

$$(a_n) \equiv 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$$

mientras que

$$(c_n) \equiv 1/2, 1, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$$

no lo es.

Notar que, en particular, toda sucesión es una subsucesión suya.

Ejercicio:
Demostrar que existen sucesiones S_1 y S_2 tales que $S_1 \neq S_2$, siendo S_1 una subsucesión de S_2 y S_2 una subsucesión de S_1. Esto pone de manifiesto que la relación binaria $S_1 \preceq S_2$ sii S_1 es una subsucesión de S_2 no es una relación de orden en el conjunto de las sucesiones. (Ver libro de J.Fuertes, J.Martinez de la bibliografía).

LIMITES

DEFINICION:

Sea (a_n) una sucesión de números reales y $L \in \mathbf{R}$. Diremos que (a_n) converge, o tiende, hacia L y lo escribiremos abreviadamente así:

$$\lim a_n = L \qquad (a_n) \longrightarrow L \qquad \text{o simplemente} \qquad a_n \longrightarrow L$$

Si se cumple una de las siguientes condiciones:

1.

$$\forall\, V \in B\,(L) \quad \exists\, n_o\,(V) \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall\, m > n_o\,(V), m \in \mathbf{N},\ a_m \in V$$

2.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_o\,(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall\, m > n_o\,(\varepsilon), m \in \mathbf{N}, \quad \Rightarrow$$

$$|a_m - L| < \varepsilon \qquad \text{o, lo que es equivalente,} \qquad d\,(a_m, L) < \varepsilon$$

3.

$$\forall\, B\,(L, r) \quad \exists\, n_o\,(r) \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall\, m > n_o\,(r),\ a_m \in B\,(L, r).$$

Veamos que estas tres definiciones son equivalentes, pero antes analicemos qué es lo que significan.

La definición 1 expresa que si a_n tiende hacia L para cada entorno V de L existe un término a_{n_o}, que depende de V, tal que todos los términos posteriores a él pertenecen a V.

Otra interpretación es que cada $V \in B\,(x)$ contiene todos los términos a_n salvo un número finito de ellos.

La definición 2 nos dice que si a_n tiene como límite L para cada $\varepsilon > 0$ que fijemos existe un término a_{n_o}, que depende de ε, tal que todos los términos posteriores a él distan de L menos que el ε que hemos fijado.

Otra interpretación de la definición 2 es que dado $\varepsilon > 0$ sólo hay un número finito de elementos en (a_n) que distan de L más de ε.

Consideraciones análogas sirven para la interpretación de la definición 3.

$1 \Rightarrow 3$: Inmediato, pues toda bola centrada de L es un entorno de L.
$3 \Rightarrow 1$: Si $V \in B\,(L)$ existe un r tal que $B\,(L, r) \subset V$.
$2 \Rightarrow 3$: Dado $B\,(L, r)$ basta tomar $\varepsilon = r$.
$3 \Rightarrow 2$: Dado ε basta considerar $B\,(L, \varepsilon)$.

De las definiciones dadas se desprende:

La sucesión (a_n) no converge hacia L si existe un entorno V de L tal que $\forall\, n \in N\ \exists\, m > n$ tal que $a_m \notin V$, o lo que es equivalente, que CV contiene infinitos términos de la sucesión.

Ejercicio: Probar que si (a_n) no converge a L existe una subsucesión propia (b_n) de (a_n) que no converge a L.

La definición 1 es válida para establecer el concepto de límite de una sucesión de elementos de A con tal de que este esté dotado de una topología. Las otras dos exigen más, que A esté dotado de una métrica.

PROPOSICION 1: Si una sucesión tiene límite, éste es único.

DEMOSTRACION:

Si (a_n) tuviese dos límites L_1 y L_2 consideremos $V \in B(L_1)$ y $W \in B(L_2)$ tales que $V \cap W = \emptyset$.

V habría de contener todos los términos de (a_n) a partir de $a_{n_{(V)}}$ y W habría de contener todos los términos de (a_n) a partir del $a_{n_{(W)}}$, si

$$\nu = \max{}^o\{n_{(V)}, n_{(W)}\}$$

los términos posteriores a a_ν deberían de estar a la vez en V y W lo cual es imposible puesto que $V \cap W = \emptyset$.

(Notar que para que esta proposición sea válida es necesario que el espacio sea separado, como es el caso de la topología con que hemos dotado a $\mathbf{R}$.)

DEFINICION:

Diremos que la sucesión (a_n) es *convergente* si tiene límite.

PROPOSICION 2:

Si (a_n) es convergente $\implies$ (a_n) está acotada.

DEMOSTRACION:

Sea $L = \lim a_n$; en $B\,(L,1)$ han de estar todos los términos de la sucesión a partir de un a_ν. Luego los únicos que pueden no pertenecer a $B\,(L,1)$ son:

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu$$

$$\begin{array}{ll} \text{Sean} & M = \text{max}^o\{a_1, a_2, \ldots a_\nu, L+1\}+1, \\ \text{y} & m = \text{min}^o\{a_1, a_2, \ldots, a_\nu, L-1\}-1 \end{array}$$

desde el término $a_{\nu+1}$ en adelante todos son menores que $L+1$, puesto que pertenecen a $B\,(L,1)$, y por tanto menores que M. Como los ν primeros también son menores que M, todos los términos de (a_n) son menores que M y por lo tanto (a_n) está acotada superiormente por M.

De forma análoga puede demostrarse que está acotada inferiormente por m.

El recíproco es falso.

PROPOSICION 3:

Si $(a_n) \longrightarrow L \quad \Longrightarrow \quad (b_n) \longrightarrow L$ cualquiera que sea la subsucesión (b_n) de (a_n).

DEMOSTRACION:

Cualquiera que sea $V \in B\,(L)$ en V están todos los términos de (a_n) a partir de uno en adelante. Por lo tanto lo mismo ocurre con los términos de (b_n) a partir de uno en adelante, cualquiera que sea la subsucesión (b_n) de (a_n).

COROLARIO 1:

(a_n) es convergente $\quad \Longleftrightarrow \quad (b_n)$ es convergente cualquiera que sea la subsucesión (b_n) de (a_n).

DEMOSTRACION:

La implicación ($\Rightarrow$) está demostrada en la proposición anterior, que además aade que toda subsucesión tienen el mismo límite que (a_n).

En el sentido ($\Leftarrow$) queda justificada por el hecho de que (a_n) es subsucesión de ella misma y teniendo en cuenta la proposición anterior podemos asegurar que no sólo todas las subsucesiones son convergentes, sino que además tienen el mismo límite.

COROLARIO 2:

Si (a_n) admite dos subsucesiones con límite distinto, o una que no sea convergente, entonces (a_n) no es convergente.

PROPOSICION 4:

Si $(a_n) \to L \Rightarrow L \in \overline{\{(a_n)\}}$ y si además (a_n) no es estacionaria entonces $L \in \{(a_n)\}'$.

La demostración es evidente a partir de la definición de límite.

TEOREMA 1:

Sea $A \subset \mathbf{R}^m$

a) Si $x \in A'$ existe una sucesión de elementos de A, todos distintos, que converge hacia x.

b) Si $x \in \overline{A}$ existe una sucesión de elementos de A, que converge hacia x.

DEMOSTRACION:

a) Puesto que $x \in A'$ en $B\,(x, 1)$ ha de haber puntos de A distintos de x, elijamos uno de ellos y llamémosle a_1; hecho esto consideremos el entorno $B\,(x, d\,(x, a_1)/2)$ en él debe de haber puntos de A distintos del x, elijamos uno, al que designaremos por a_2, claramente $a_2 \neq a_1$. Tomando el entorno $B\,(x, d\,(x, a_2)/2)$ en él existe un $a_3 \in A$ tal que $a_3 \notin \{x, a_1, a_2\}$; siguiendo este proceso se construye una sucesión que verifica las condiciones que asegura el teorema anunciado.

b) Si $x \in \overline{A}$ y $x \notin A'$ es un punto aislado de A y basta tomar la sucesión $a_n = x \; \forall \, n$.

CONVERGENCIA DE LAS SUCESIONES MONOTONAS

PROPOSICION 5:

Una sucesión (a_n) monótona creciente es convergente si y sólo si está acotada superiormente.

DEMOSTRACION:

$\Rightarrow$) Ver proposición 2.
$\Leftarrow$) Se demuestra sin dificultad que el extremo superior de $\{(a_n)\}$ es el límite.

Puede enunciarse una proposición análoga para las sucesiones decrecientes.

El número e.
Se demuestra que la sucesión

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in N}$$

es creciente y acotada, y por lo tanto convergente. Su límite (que es un número irracional de expresión decimal 2'71828182...) se designa por e.

PROPOSICION 6:

Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

DEMOSTRACION:

Si $E = \{(a_n)\}$ es finito existe un elemento x que se repite infinitas veces, la sucesión $x, x, x, \ldots, x, \ldots$ es una subsucesión de (a_n) que converge hacia x.

Si E es infinito, como por hipótesis está acotado, tiene un punto de acumulación x, y por el teorema 1 existe una sucesión de elementos de E que tiende a x. Para poder asegurar que esta sucesión es una subsucesión de (a_n) se procede como en el teorema citado pero en cada entorno de los que vamos formando se debe de elegir un elemento de E que figure en la sucesión con subíndice mayor que los que ya hemos tomado.

SUCESIONES DE CAUCHY

DEFINICION 1:

La sucesión (a_n) se dice que es de Cauchy si cumple una de las siguientes condiciones:

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o(\varepsilon) \in N \,/\, \forall p, q > n_o \qquad d\,(a_p, a_q) < \varepsilon.$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o(\varepsilon) \in N \,/\, \forall p, q > n_o \qquad a_q \in B\,(a_p, \varepsilon).$

Es inmediato que las dos definiciones son equivalentes, lo que quiere decir que si damos un número cualquiera ε es posible encontrar un término tal que todos los posteriores a él distan entre sí menos que el ε dado, y esto para cualquier ε que queramos fijar.

Por ejemplo: La sucesión (a_n) tal que $a_n = 1$ si n es par y $a_n = 2$ si n es impar no es una sucesión de Cauchy pues cualquiera que sea $0 < \varepsilon < 1$ no se puede conseguir que a partir de un término en adelante la distancia entre dos cualesquiera de ellos sea menor que ε.

PROPOSICION 7:

Toda sucesión de Cauchy está acotada y tiene una subsucesión convergente.

El que está acotada es inmediato y la otra afirmación se obtiene de la proposición 6.

TEOREMA DE CAUCHY PARA SUCESIONES REALES

$$(a_n) \quad \text{es convergente} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n) \quad \text{es de Cauchy.}$$

DEMOSTRACION:

La demostración de que toda sucesión convergente es de Cauchy es inmediata. Probemos, pues, que toda sucesión de Cauchy es convergente:

Sea (b_n) una subsucesión convergente, ver proposición 7, de (a_n) tal que $(b_n) \to x$. Veamos que $(a_n) \to x$.

Sea $\varepsilon > 0$, por ser (a_n) de Cauchy

$$\exists\, n_1 \in \mathbf{N} \quad \text{tal que} \quad \forall\, p, q > n_1 \qquad |a_p - a_q| < \varepsilon/2,$$

como $(b_n) \to x$

$$\exists\, n_2 \in \mathbf{N} \quad \text{tal que} \quad \forall\, n > n_2 \qquad |b_n - x| < \varepsilon/2.$$

Si $n_0 = \max^o \{n_1, n_2\} \qquad \forall\, k > n_0$ tomando $q > n_0$

$$|a_k - x| \leq |a_k - b_q| + |b_q - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Curiosamente este teorema es válido si el espacio considerado es $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ ó $\mathbf{R}$, que es nuestro caso, pero no es válido si el espacio en el que se consideran las sucesiones es $\mathbf{Q}$.

ALGEBRA DE LAS SUCESIONES DE NUMEROS REALES

En el conjunto de las sucesiones S de números reales se consideran las siguientes operaciones, que no son más que una particularización de lo visto en las primeras páginas de este tema al caso en que $A = \mathbf{R}$.

$$\begin{array}{ll} a) & (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \\ b) & \forall\, \lambda \in \mathbf{R} \quad \lambda\,(a_n) = (\lambda\, a_n) \\ c) & (a_n)\,(b_n) = (a_n b_n) \end{array}$$

Con las dos primeras operaciones S tiene estructura de espacio vectorial y con las tres estructura de álgebra. A continuación demostraremos que el subconjunto C de las sucesiones convergentes es un subálgebra de S.

PROPOSICION 8:

Si $(a_n) \to a$ y $(b_n) \to b \quad \Longrightarrow \quad (a_n) + (b_n) \to a + b$.

DEMOSTRACION:

Sea ε y consideremos $\varepsilon/2$

$$\exists\, n_1 \in N \qquad / \quad \forall\, n > n_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\exists\, n_2 \in N \qquad / \quad \forall\, n > n_2 \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $n_o = \max^o\{n_1, n_2\}$ entonces $\forall\, n > n_o$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b - b_n| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así hemos demostrado que dado $\varepsilon > 0$ la distancia de $a_n + b_n$ a $a + b$ es menor que $\varepsilon \Longrightarrow \lim(a_n) + (b_n) = a + b \quad$ c.q.d.

COROLARIO:

$$(a_n) \to a \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n - a) \to 0$$

Basta poner en la proposición, $(b_n) = (-a)$ es decir $b_n = -a \quad \forall\, n$.

PROPOSICION 9:

Si $(a_n) \to a \quad \Rightarrow \quad c\,(a_n) \to c\,a$.

DEMOSTRACION:

Si $c = 0$ la sucesión $c\,(a_n)$ es estacionaria con todos sus términos 0 y converge hacia 0.

Si $c \neq 0$ sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $\frac{\varepsilon}{|c|}$, como $\lim a_n = a$

$$\exists\, n_o \in N \,/\, \forall\, n > n_o \Rightarrow |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{|c|} \Rightarrow |c\,a - c\,a_n| = |c|\,|a - a_n| < \frac{|c|\varepsilon}{|c|}$$

$$= \varepsilon \quad \forall\, n > n_o \quad \Rightarrow \quad \lim c\,(a_n) = c\,a \qquad \text{c.q.d.}$$

PROPOSICION 10:

Si (a_n) está acotada y $(b_n) \to 0 \quad \Rightarrow \quad a_n b_n \to 0$.

En efecto: Si (a_n) es acotada $\Rightarrow \exists\, k > 0$ tal que $|a_n| < k$, como $b_n \longrightarrow 0$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_o \in$**N** tal que $\forall\ n > n_o \quad |b_n| < \varepsilon / k$.

Luego

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_o \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall\, n > n_o \quad |a_n b_n| = |a_n|\ |b_n| < \frac{k\,\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

PROPOSICION 11:

Si $(a_n) \to a$ y $(b_n) \to b \quad \Rightarrow \quad (a_n b_n) \to ab$.

DEMOSTRACION:

Si una de las dos sucesiones tiende a 0, aplicando la proposición anterior el producto tiende a 0.

Si ninguna tiende hacia 0 entonces:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)|,$$

al ser (a_n) acotada, $\exists\, k > 0$ tal que $|a_n| < k$.

$$\begin{array}{rl} \text{Como} \quad a_n \longrightarrow a & \exists\, n_1 \text{ tal que } \forall\, n > n_1 \quad |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|} \\ \text{y como} \quad b_n \longrightarrow b & \exists\, n_2 \text{ tal que } \forall\, n > n_2 \quad |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2k} \end{array}$$

Tomando $n_o = \max^o\{n_1, n_2\}$, tenemos que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_o$ tal que $\forall\, n > n_o$

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n|\ |b_n - b| + |b|\ |a_n - a| < \frac{k\,\varepsilon}{2k} + \frac{|b|\,\varepsilon}{2\,|b|} = \varepsilon.$$

De las proposiciones 8, 9 y 11 se deduce que C es un subálgebra de S.

El álgebra S es conmutativa y tiene por unidad la sucesión (a_n) tal que $a_n = 1\ \forall n \in N$. Sin embargo no toda sucesión tiene inversa, es decir, simétrica respecto al producto definido.

Ejercicio: Hallar la condición necesaria y suficiente para que una sucesión (a_n) tenga inversa.

PROPOSICION 12:

Si $(a_n) \to a$, siendo $a \neq 0$ y $a_n \neq 0$ para todo $n \Longrightarrow (\frac{1}{a_n}) \to \frac{1}{a}$.

DEMOSTRACION:

Tanto si $a > 0$ como si $a < 0$ existe un $k > 0$ tal que $|a_n| > k$ a partir de un cierto $n_1 \in N$, pues como $(a_n) \longrightarrow a$ existe un n_1 tal que para todo $n > n_1 \quad |a_n - a| < \frac{1}{2}|a|$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}|a| < |a_n| \qquad \forall n > n_1$$

Tomemos uno de estos k.
Para cada $\varepsilon > 0$, $\exists n_2$ tal que $\forall n > n_2 \quad |a - a_n| < \varepsilon\ |ka|$, si $n_o =$max$^o\{n_1, n_2\}$, para todo $n > n_o$ se verifica:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_n|}{|a|\,|a_n|} < \frac{\varepsilon\,|ka|}{|k|\,|a|} = \varepsilon.$$

COROLARIO:

Si $(a_n) \longrightarrow a \quad$ y $\quad (b_n) \longrightarrow b$ con $b \neq 0$ y $b_n \neq 0 \quad \forall n$ entonces

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \longrightarrow \frac{a}{b}.$$

DEMOSTRACION:

De la proposición anterior se deduce que $(1/b_n) \longrightarrow 1/b$ y por la proposición 11 que $(a_n/b_n) = (a_n)\ (1/b_n) \longrightarrow a/b \quad$ c.q.d.

Ejercicio: Denotando por:

C	al	conjunto	de	las	sucesiones	convergentes.
B	”	”	”	”	”	acotadas.
N	”	”	”	”	”	convergentes a 0.
S	”	”	”	”	”	

a) Demostrar que:

$$N \subset C \subset B \subset S.$$

y cada uno es un subálgebra del siguiente.

b) Sea H uno cualquiera de los subespacios considerados en a). Demostrar que si $h \in H$ y $\alpha \in S$ pero $\alpha \notin H$ entonces $h + \alpha \notin H$.

Acabamos de considerar el espacio vectorial de las sucesiones reales y un conjunto de subespacios, queremos hacer notar que todos los subespacios considerados son de dimensión infinita, pues lo es el subespacio N, y que el conjunto de sucesiones $\{S_i\}$ tal que $S_i \equiv (a_{in})$ donde $a_{in} = 0$ si $n \neq i$ y $a_{ii} = 1$ es un subconjunto libre de N pero no constituye una base de él, porque por ejemplo la sucesión (n) no pertenece al subespacio engendrado por dicho subconjunto.

Hemos de hacer notar que no se conoce explícitamente una base ni siquiera de N.

SUCESIONES RECURRENTES

DEFINICION:

Se dice que una sucesión (a_n) es recurrente si cada término, a partir de uno de ellos en adelante, se puede obtener en función de los anteriores.

Vamos a estudiar en únicamente aquellas sucesiones (a_n) para las cuales existe un número k (fijo) y números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ tales que:

$$\phi \equiv a_{n+k} = \lambda_1\, a_{n+k-1} + \lambda_2\, a_{n+k-2} + \cdots + \lambda_k\, a_n.$$

diremos que tales sucesiones son *lineales de orden* k y a la expresión anterior la denominaremos *ecuación de recurrencia* de (a_n).

Notar que toda sucesión de este tipo, fijados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, queda determinada al dar sus k primeros términos, el resto se obtiene a través de la ecuación de recurrencia.

Ejemplos:

1. Progresiones geométricas:

$$a_{n+1} = q\, a_n$$

   $k = 1$ y $b_1 = q$, son de primer orden.

2. Progresiones aritméticas:

$$\left.\begin{array}{lcl} a_n & = & a_{n-1} + r \\ a_{n+1} & = & a_n + r \end{array}\right\} \Longrightarrow a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$$

   son de orden 2, con $b_1 = 2$ y $b_2 = -1$.

3. Sucesiones de Fibonacci:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

   $k = 2$, $b_1 = b_2 = 1$.

4. Para la sucesión (n^2):

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$$

   luego $a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2$, y restando estas dos expresiones se obtiene:

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$$

   se trata pues de una sucesión de 3^{er} orden.

5. Puede probarse que en general, la sucesión: $a_n = n^k, (k \in N^*)$ es de orden $k + 1$.

TEOREMA:

El conjunto de todas las sucesiones recurrentes de igual orden k que satisfacen la misma ecuación recurrente ϕ forman un subespacio vectorial, al cual denotaremos por (S, R, k, ϕ), del espacio vectorial S de las sucesiones.

La demostración es inmediata.

Ejercicios:

1) El conjunto de todas las progresiones geométricas de la misma razón q forman un subespacio de S.
2) El conjunto de todas las progresiones aritméticas es un subespacio de S.
3) El conjunto de todas las sucesiones de Fibonacci constituyen otro subespacio de S.

TEOREMA:

El subespacio vectorial (S, R, K, ϕ) es de dimensión k, y una base suya está formada por las sucesiones pertenecientes a él:

$$S_1,\, S_2, \ldots, S_k$$

cuyos k primeros términos son, respectivamente:

$$\begin{array}{c} (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{array} \qquad (**)$$

DEMOSTRACION:

Es inmediato probar que el conjunto de las sucesiones cuyos k primeros términos se consideran en $(**)$ es linealmente independiente; además es un sistema de generadores del subespacio (S, R, k, ϕ) pues si $(a_n) \in (S, R, k, \phi)$ donde

$$\phi \equiv a_{n+k} = \lambda_1\, a_{n+k-1} + \cdots + \lambda_k\, a_n$$

y que:

$$(a_n) = a_1\,S_1 + a_2\,S_2 + \ldots + a_k\,S_k$$

Si la sucesión $(a_n) \in (S, R, k, \phi)$, verifica:

$$\phi \equiv a_{n+k} = \lambda_1\,a_{n+k-1} + \cdots + \lambda_k\,a_n$$

consideremos la ecuación:

$$\phi(x) \equiv x^{n+k} = \lambda_1\,x^{n+k-1} + \cdots + \lambda_k\,x^n$$

dividiendo los dos miembros por x^n se obtiene la ecuación:

$$\Phi(x) \equiv x^k = \lambda_1\,x^{k-1} + \lambda_2\,x^{k-2} + \cdots + \lambda_k$$

a la cual denominaremos *ecuación característica* del subespacio (S, R, k, ϕ).

PROPOSICION 13:

Si $\Phi(x)$ tiene todas sus raíces reales y distintas, $r_1, r_2, \ldots, r_k$, las k progresiones geométricas

$$q_i \equiv ({r_i}^{n-1}) = 1, r_i, r_i^2, r_i^3, \ldots, r_i^n, \ldots$$

constituyen una base de (S, R, k, ϕ).

DEMOSTRACION:

$$q_i \in (S, R, k, \phi) \qquad i = 1, \ldots, k$$

ya que al ser r_i una raíz de $\Phi(x)$

$$r_i^k = \lambda_1 r_i^{k-1} + \ldots + \lambda_k \Longrightarrow r_i^{n+k} = \lambda_1 r_i^{n+k-1} + \ldots + \lambda_k r_i^n$$

que es la c.n.y s. para que una sucesión pertenezca a (S, R, k, ϕ).

Para probar que el conjunto $\{q_i\}_{i=1}^k$ es linealmente independiente basta considerar el determinante de Vandermonde que se obtiene al considerar los k primeros términos de ellas.

La proposición anterior permite obtener una expresión del término general de las sucesiones de este tipo procediendo de la siguiente forma:

Una vez halladas las raíces de $\Phi(x)$, que suponemos todas reales y distintas, se conocen las progresiones geométricas q_i que forman una base del espacio a estudiar, por lo tanto si $(a_n) \in (S, R, k, \phi)$

$$(a_n) = \lambda_1 \, q_1 + \lambda_2 \, q_2 + \cdots + \lambda_k \, q_k \Longrightarrow$$

$$a_n = \lambda_1 \, r_1^{n-1} + \lambda_2 \, r_2^{n-1} + \cdots + \lambda_k \, r_k^{n-1} \qquad (*)$$

para determinar los valores λ_i $(i = 1, \ldots, k)$, que por la teoría estudiada en Algebra sobre espacios vectoriales sabemos que existen y son únicos, basta resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccl} a_1 & = & \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \\ a_2 & = & \lambda_1 \, r_1 + \lambda_2 \, r_2 + \cdots + \lambda_k \, r_k \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k & = & \lambda_1 \, r_1^{k-1} + \lambda_2 \, r_2^{k-1} + \cdots + \lambda_k \, r_k^{k-1} \end{array}$$

y llevar éstos a la expresión $(*)$.

La expresión $(*)$ obtenida, una vez sustituidos los valores correspondientes de los λ_i, permite el cálculo directo de a_n en función de $a_1, a_2, \ldots, a_k$, sin haber calculado todos los términos anteriores, método al que nos veníamos obligados si sólo se dispusiesemos de la ecuación de recurrencia.

El disponer $a_{n+1} = f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ tiene la ventaja de poder calcular, de forma muy cómoda, el límite de la sucesión (a_n).

Ejemplos:

1. Consideremos las sucesiones de Fibonacci:

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

$$\Phi(x) \equiv x^2 = x + 1$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Así, el término general de una sucesión de Fibonacci es de la forma:

$$U_n = \lambda\, r_1^{n-1} + \mu\, r_2^{n-1}$$

para determinar λ y μ tomemos $n = 1$ y $n = 2$

$$\begin{aligned} U_1 &= \lambda + \mu \\ U_2 &= \frac{1}{2}\left[\lambda\,(1+\sqrt{5}) + \mu\,(1-\sqrt{5})\right] \end{aligned}$$

de donde se despejarían λ y μ.

Para el caso particular $U_1 = U_2 = 1$ resulta:

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

2. Las progresiones geométricas de razón q tienen por ecuación característica $x = q$ cuya única raíz es q. Es evidente que la progresión

$$1, q, q^2, \ldots, q^n,$$

es una base de este espacio y

$$U_n = U_1 q^{n-1}$$

Notar que la ecuación característica de las progresiones aritméticas es $x^2 = 2x - 1$ que tiene a 1 como raíz doble y no es aplicable el criterio anterior.

NOTA:
La ecuación característica $\Phi(x)$ es la ecuación característica de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k & \lambda_{k-1} & \lambda_{k-2} & \ldots & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

así

$$M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{k+1} \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$M^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+k} \end{pmatrix}$$

Si es fácil calcular M^n, como ocurre si M es diagonalizable, la fórmula permite de nuevo calcular a_{n+1} en función de $a_1, a_2, \ldots, a_k$, pudiendo obtener también así el valor de a_{n+1} sin calcular todos los términos anteriores.

SUCESIONES REALES EN $\overline{\mathbf{R}}$

El hecho de que $\mathbf{R} \subset \overline{\mathbf{R}}$ permite considerar toda sucesión de números reales como una sucesión de términos en $\overline{\mathbf{R}}$.

No nos interesan, en este estudio, sucesiones en las que aparezcan como términos ∞ y $-\infty$. Los términos de las sucesiones que vamos a estudiar van a ser siempre números reales, pero, como ya hemos indicado, consideradas como sucesiones de $\overline{\mathbf{R}}$.

Habrá sucesiones que en $\mathbf{R}$ no tengan límite pero ahora sí, porque su límite sea ∞ ó $-\infty$, teniendo en cuenta que la idea de límite (ver definición 1), va ligada a la de entorno y que los entornos de cada $x \in \mathbf{R}$ son esencialmente iguales en $\mathbf{R}$ que en $\overline{\mathbf{R}}$, siguiendo la definición 1 de límite de una sucesión tendremos ahora:

DEFINICION 1:

$(a_n) \longrightarrow \infty$ si $\forall V \in B(\infty)$ existe un $n_o \in N$ tal que para todo $m > n_o$ se verifica $a_m \in V$

La definición 2 de límite dada se traduce ahora en esta otra:

DEFINICION 2:

$(a_n) \longrightarrow \infty$ si para cada $M \in \mathbf{R}$ existe un $n_o \in \mathbf{N}$ tal que para todo $m > n_o$ se verifica $M < a_m$.

Si se cambia ∞ por $-\infty$ la definición 1 es análoga y la 2 tambien modificando el sentido de la última desigualdad.

DEFINICION:

Si $(a_n) \longrightarrow \infty$ o $(a_n) \longrightarrow -\infty$ diremos que es una sucesión *divergente*.

DEFINICION:

Toda sucesión que no tenga límite en $\overline{\mathbf{R}}$ diremos que es *oscilante*.

Dejamos como ejercicio la demostración de las siguientes

PROPIEDADES:

1) $(a_n) \longrightarrow \infty$ toda subsucesión tiende a ∞. Análogamente para $-\infty$
2) $(a_n) \to \infty$ y $(b_n) \to \infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to \infty$.
3) $(a_n) \to -\infty$ y $(b_n) \to -\infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to -\infty$.
4) $(a_n) \to \infty$ y (b_n) está acotada inferiorm. $\Longrightarrow (a_n + b_n) \to \infty$.
5) $(a_n) \to -\infty$ y (b_n) está acot. superiorm. $\Longrightarrow (a_n + b_n) \to -\infty$
6) $(a_n) \to \infty$ (ó $-\infty$) si $a_n \neq 0 \; \forall \, n \Longrightarrow (1/a_n) \to 0$
7) $(a_n) \to \infty$ y $(b_n) \to \infty \Longrightarrow (a_n b_n) \to \infty$
8) $(a_n) \to \infty$ y $\exists \, n_o \in \mathbf{N} \; \exists \, k > 0 \, / \, b_m > k \; \forall \, m > n_o \Longrightarrow (a_n b_n) \to \infty$
9) $(a_n) \to -\infty$ y $\exists \, n_o \in \mathbf{N} \; \exists \, k > 0 \, / \, b_m < -k \forall \, m > n_o \Longrightarrow (a_n b_n) \to \infty$
10) $\exists n_o \in N \, / \, \forall \, m > n_o \; a_m \geq k > 0$ y $b_n \neq 0 \forall \, n$ con $(b_n) \to 0 \longrightarrow$ $(a_n / b_n) \to \infty$

DEFINICION:

Llamaremos *progresión aritmético-geométrica* a toda sucesión que sea el producto de una progresión aritmética por otra geométrica.

Si (c_n) es una progresión aritmético-geométrica, por definición existen dos sucesiones (a_n) y (b_n) tales que (a_n) es una progresión aritmética, de razón d, y otra geométrica (b_n) de razón r tales que:

$$c_n = a_n b_n, \qquad \forall \, n \in \mathbf{N}$$

Para calcular

$$S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$$

procederemos de la siguiente forma:

$$S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n$$

multiplicando ambos términos por r resulta:

$$S_n\, r = a_1 b_2 + a_2 b_3 + \ldots + a_{n-1} b_n + a_n b_n r$$

de donde restando se obtiene:

$$\begin{aligned}
S_n(1-r) &= a_1 b_1 + b_2(a_2 - a_1) + \cdots + b_n(a_n - a_{n-1}) - a_n b_n r \\
&= a_1 b_1 + d\,(b_2 + \cdots + b_n) - a_n b_n r \\
&= b_1 \left[a_1 + d\,r\,\left(1 + r + \cdots + r^{n-2}\right)\right] - a_n b_n r \\
&= b_1 \left[a_1 + d\,r\,\left(1 + r + \cdots + r^{n-2}\right) - (a_1 + (n-1)\,d)\; r^n\right] \\
&= b_1 \left[a_1 + d\,r\,\left(1 + r + \cdots + r^{n-1}\right) - (a_1 + nd)\, r^n\right] \\
&= b_1 \left[a_1 + d\,r\,\frac{1-r^n}{1-r} - (a_1 + nd)\, r^n\right]
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow S_n = b_1 \left[\frac{a_1 - (a_1 + nd) r^n}{1-r} + dr\frac{1-r^n}{(1-r)^2}\right].$$

Para más información sobre este tipo de progresiones consultar:
ANALISIS ALGEBRAICO de Fz. de Trocóniz-Belda Villena. Ed.Vizcaína. Bilbao 1961, pág. 576 ó
TOMO V de la obra de Díez Hernando. Ed. Tebar Flores.

CRITERIO DE STOLZ

Dadas dos sucesiones (a_n) y (b_n) tales que $b_n \neq 0$ para todo n, si se cumple una de las dos condiciones siguientes:

1) La sucesión (b_n) es creciente y divergente,
ó
2) Ambas sucesiones son infinitésimos y (b_n) es decreciente,

y existe

$$\lim \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right) = L$$

entonces también existe

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$$

y vale L.

Tomando logaritmos neperianos en la sucesión $\sqrt[n]{a_n}$ y aplicando el criterio anterior se obtiene el

CRITERIO DE LA RAIZ

Si la sucesión (a_n) es de términos positivos y existe

$$\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = L$$

entonces también existe

$$\lim \sqrt[n]{a_n}$$

y vale L.

INFINITOS E INFINITESIMOS EQUIVALENTES

$\operatorname{sen} \varepsilon_n \sim \operatorname{tag} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$	si $\varepsilon_n \to 0$
$\operatorname{arcsen} \varepsilon_n \sim \operatorname{arctg} \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$	si $\varepsilon_n \to 0$
$1 - \cos \varepsilon_n \sim \varepsilon_n^2/2$	si $\varepsilon_n \to 0$
$\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$	si $\varepsilon_n \to 0$
$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\,\pi\, n}$	si $n \to \infty$ (Stirling)
$a_n \sim a$	si $a_n \to a$

ORDENES DE INFINITUD

El orden de infinitud de algunas sucesiones usuales es, de mayor a menor, el siguiente:

$$n^{an} \gg n! \gg b^n \gg n^c \gg \log_d^n$$

siendo $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, con $a > 0, b > 1, c > 0, d > 1$.

Nota: La justificación de estos resultados puede encontrarse, por ejemplo, los libros de *Análisis Algebraico* de Belda-Trocóniz ó Rey Pastor.

Ejercicios:

1. Probar que si en la demostración del apartado a) del teorema 1 sustituimos las bolas consideradas por:
   a) $B(x, d(x, a_i))$ la sucesión (a_n) construida verificaría $a_m \neq a_n$, si $n \neq m$ pero podría ocurrir que (a_n) no convergiese a x.

2. Demostrar que si $P(x) = a + bx$, la sucesión $(P(n))$ es una progresión aritmética.

   Recíprocamente, demostrar que si (a_n) es una progresión aritmética existe un polinomio de primer grado $P(x)$ tal que $a_n = P(n)$.

   Como generalización del ejercicio anterior, se define progresión aritmética de orden p a toda sucesión (a_n) tal que:

   $$a_n = P(n), \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

   siendo $P(x)$ un polinomio de grado p.

3. Demostrar
   a) $a > 1$ y $b_n \longrightarrow \infty \implies \log_a b_n \longrightarrow \infty$
   b) $a > 1$ y $b_n \longrightarrow 0 \implies \log_a b_n \longrightarrow -\infty$
   c) $0 < a < 1$ y $b_n \longrightarrow \infty \implies \log_a b_n \longrightarrow -\infty$
   d) $0 < a < 1$ y $b_n \longrightarrow 0 \implies \log_a b_n \longrightarrow \infty$
   Se supone que $b_n > 0\ \forall\, n$ en todos los casos.

BIBLIOGRAFIA:
T.M.Apostol.- "Análisis Matemático". Ed: Reverté.
T.M. Apostol.- "Calculus. Tomo I". Ed: Reverté.
Belda-Trocóniz.- "Análisis Algebraico".
J. Fuertes, J. Martinez.- "Problemas de Cálculo Infinitesimal"
Ed: Mc Graw Hill. Col: Shaum.
A.I. Markushvich.- "Sucesiones recurrentes" Ed: Mir.
Martinez Salas.- "Elementos de Matemáticas".
Rey Pastor.- "Análisis Algebraico".