¡¡PARADOJAS!!

Un poco de historia y versión “de andar por casa” del Teorema de incompletitud (Teorema de Gödel)

MÉTODO AXIOMÁTICO DE EUCLIDES

Los matemáticos de la antigüedad pretendieron explicar la realidad geométrica y numérica que nos rodea con rigor.

En el III A.C, Euclides recogió en su texto “Elementos” el saber de su tiempo sobre la Geometría. Lo hizo con un rigor y encadenamiento extraordinario para su época. Estableció unos principios (axiomas) que se daban por verdades indemostrables dada su evidencia y, usando el razonamiento lógico, dedujo de ellos los grandes teoremas de la Geometría (Teorema de Pitágoras, suma de los ángulos del triángulo,…).

Los cinco axiomas establecidos por Euclides son:

I. Por dos puntos sólo se puede trazar una recta.
II. Todo segmento se puede extender.
III. Dado un centro y un radio, sólo es posible trazar una circunferencia.
IV. Todos los ángulos rectos son iguales.
V. Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a ella.

Este esquema de desarrollo (método axiomático) se convirtió con el tiempo en el que debería seguir toda ciencia que se considerase irrefutable.

Rafael, en su famoso cuadro “Academia de Atenas”, pintó algunos de los grandes sabios de la antigüedad. Entre ellos está Euclides. Este cuadro representa “la Verdad Racional” frente a otro cuadro (La Disputa del Sacramento) de la misma Sala de la Signatura del Vaticano que representa “la Verdad Revelada”. Platón, fundador de La Academia de Atenas, hizo inscribir en su puerta “No entre quien no sepa Geometría”

EL AXIOMA V DE EUCLIDES

Este axioma originó muchas especulaciones entre los matemáticas de varios siglos. Se dice que el propio Euclides dudó sobre su inclusión y que finalmente lo añadió, porque sin él no le era posible demostrar ciertos teoremas importantes.

Mientras los demás axiomas eran fácilmente comprobables, la idea de rectas paralelas (rectas que indefinidamente prolongadas, nunca se encuentran) llevaba implícita la idea de infinito con todas sus complicaciones. Además era empíricamente indemostrable (no podemos prolongar infinitamente dos rectas para ver si se cortan).

Hubo muchos intentos de demostrar este axioma a partir de los demás. En el caso de haberlo logrado, hubiese dejado de ser un axioma (verdad aceptada) para convertirse en un teorema (verdad demostrable a partir de los axiomas). Todos esos intentos fracasaron.

De los intentos de demostrar el axioma V, el que tuvo más repercusión fue debido en el XVIII a Saccheri (también Lambert). Intentó demostrar el Axioma V mediante el “método de reducción al absurdo”: Partiendo de los demás axiomas, supongamos que el V es falso. Si llegamos a una contradicción con los axiomas de partida quedará probado que es verdadero.

Suponer que el axioma V era falso, llevaba consigo dos posibles puntos de de partida:

- Por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela.
- Por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela.

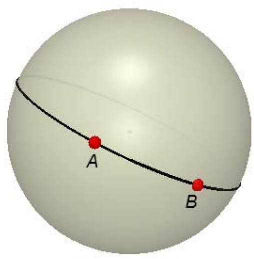
Pues bien, partiendo de uno u otro supuesto, se llegaba a resultados muy extraños en la realidad del plano. Esos extraños resultados hacían pensar que efectivamente el Axioma V era verdadero. Pero lo que no reflexionaron suficientemente es que esas situaciones extrañas a las que llegaban no estaban en contradicción con los demás axiomas. Es decir, la negación del Axioma V producía resultados extraños, pero no producía contradicciones lógicas.

LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Matemáticos posteriores (XIX) profundizaron sobre esas situaciones que producía la negación del axioma V de Euclides.

Lobachevsky (1792 – 1856) no sólo abandonó esos intentos de demostrar el Axioma V, sino que desarrolló una Geometría distinta. Sustituyó el Axioma V por este otro: “Por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela a ella”.

Riemanm (1826 – 1866) tomó el camino que quedaba de la negación del Axioma V. Sustituyó ese axioma por este otro: “Por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela a ella”.



Conocemos modelos a los que se ajustan esas geometrías. Así, la Geometría de Riemann corresponde con una superficie esférica en la que las rectas son circunferencias máximas. Los segmentos (geodésicas) son porciones de esas circunferencias máximas. En ese modelo todo encaja y cabe su Axioma V: dada una recta (circunferencia máxima) y un punto exterior a ella, no es posible trazar otra recta (circunferencia máxima) que contenga al punto y no la corte. Esto es exactamente lo que ocurre con nuestra realidad a nivel planetario. Si nos movemos sobre una superficie esférica, la mínima distancia entre dos puntos no viene dada por una recta, es un tramo curvo (geodésica). Todo esto lo saben muy bien los marinos y astrónomos.

La geometría euclidiana trataba de justificar la realidad plana que nos rodea. Todo lo que se obtenía era comprobable en el mundo real. Ahí residía su "verdad"

Las geometrías no euclidianas supusieron un avance extraordinario para las Matemáticas. Una ciencia podía desarrollarse sin estar esclavizada por ninguna realidad. Es decir, las Matemáticas dejaban de ser una ciencia natural (surgida para explicar el entorno) para convertirse en una abstracción.

Desde un punto de vista lógico, no hay una geometría más verdadera que otra. Todo depende únicamente de los axiomas de partida.

EL RETO DE HILBERT

Como consecuencia de las geometrías no euclidianas surgen dos grandes dudas

- ¿En un sistema axiomático cuyos resultados no sean visibles en nuestra realidad, se podrá llegar a demostrar dos teoremas contradictorios, de modo que uno niegue lo que el otro afirma ("A es cierto" frente a "A es falso")?
- ¿En un sistema axiomático será posible demostrar, a partir de esos axiomas, todas las verdades de esa ciencia?

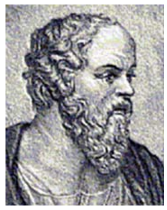
Asumiendo a finales del XIX que el método axiomático era lo correcto, todos los esfuerzos deberían concentrarse en encontrar un conjunto de axiomas, lo más reducido posible, que hiciera que las Matemáticas fueran una ciencia Completa y Consistente.

- Completa: A partir de los axiomas establecidos, toda afirmación matemática verdadera debe ser demostrable.
- Consistente: A partir de los axiomas establecidos es imposible que una afirmación se demuestre verdadera y también se demuestre verdadera su contraria.

Este fue el gran reto lanzado por Hilbert (1862 – 1943), invitando a todos los matemáticos de la época a trabajar sobre ello. Comienza el análisis crítico de los fundamentos de la Matemática

En los conceptos "completa" y "consistente" se maneja los calificativos "verdadera" y "falsa". Conviene hacer algunas reflexiones sobre la verdad y falsedad de las proposiciones. Parece muy evidente que una afirmación tiene que ser necesariamente verdadera o falsa; pero no todo es tan sencillo. Ciertas proposiciones resultan paradójicas.

AFIRMACIONES NO DECIDIBLES



Ejemplo1: Sócrates dijo: “Sólo sé que no sé nada”.

En esta sentencia el filósofo afirma que sabe algo (Sé que…); pero lo que también afirma, y además está seguro de ello, es que no sabe nada. ¿Sabe algo o no sabe nada?.

Ejemplo 2: Paradoja del mentiroso de Lewis Carroll (1832 – 1898):
“Yo estoy mintiendo”.

Si suponemos que esa afirmación es verdadera, entonces estoy mintiendo y por tanto es falso lo que digo.

Si suponemos que la afirmación es falsa, entonces no miento y por tanto es verdadero lo que digo.

Este es el típico ejemplo de proposición, que catalogarla como verdadera o falsa, nos lleva a una contradicción. Es decir, son proposiciones no decidibles.

El “truco” está en que esa frase afirma su propia falsedad.

Ejemplo 3: En este ejemplo se hace “casi” lo mismo, pero con un pequeño artificio que lo disimula. Paradoja de P.E.B. Jourdain (1879 – 1919)

Tomemos una tarjeta. En una de sus caras (cara A) escribamos “Lo escrito en la otra cara es falso”. En la otra cara (cara B) escribamos “Lo escrito en la otra cara es verdadero”.

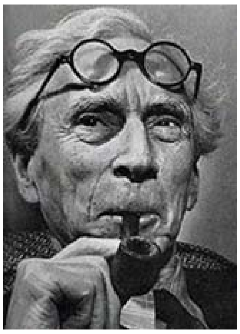
A Lo escrito en la otra cara es falso	B Lo escrito en la otra cara es verdadero

“¿Lo escrito en la cara A es verdadero o falso?”

Comienza el juego: Supongamos que lo escrito en la cara A es verdadero. Entonces lo escrito en la cara B es falso y por consiguiente, lo escrito en la cara A es falso ¡Contradicción!

Supongamos ahora que lo escrito en la cara A es falso. Entonces lo escrito en la cara B es verdadero y en consecuencia, lo escrito en la cara A es verdadero. ¡De nuevo contradicción!. Por tanto, no podemos decidir sobre lo escrito en la cara A

En estos dos últimos ejemplo nos encontramos dos proposiciones que, directa (Ejemplo 2) o indirectamente (Ejemplo 3), afirman que son falsas. Estamos en un nivel de lenguaje superior (metalenguaje o metalógica) al de p.e. “Me llamo Pepe”.



Ejemplo 4: Paradoja del barbero de B. Russell (1872 – 1970):

“El único barbero de una ciudad únicamente afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos. ¿El barbero de esa ciudad se afeita a sí mismo?”

Si se afeita a sí mismo, no es el barbero el que lo afeita (el barbero sólo afeitan a los que no se afeitan a sí mismos); pero como él es el barbero, entonces no se afeita a sí mismo. ¡Contradicción!

Si no se afeita a sí mismo, entonces es el barbero el que lo afeita; pero como el barbero es él, se afeita a sí mismo.¡Contradicción!

Al producirse esa contradicción, es evidente que el supuesto no es válido. Es decir, no puede haber un barbero que únicamente afeite a todos los que no se afeiten a sí mismos.

Ejemplo 5: Auténtica paradoja formal de B. Russell sobre la teoría de conjuntos.

Trabajando sobre la teoría de conjuntos conocida hasta ese momento, en la que se entendía como conjunto a toda colección de elementos determinada por una propiedad, Russell observó que había conjuntos que entre sus elementos tenían otros conjuntos.

Por ejemplo: Si entendemos por equipo de fútbol un conjunto de jugadores, en el conjunto de todos los equipos de fútbol, cada elemento es a su vez un conjunto:

{{Messi, Iniesta, Valdés,…}, {Casillas, Raúl,…},…}.

También observó que, con la idea de conjunto existente, había conjuntos que eran elementos de sí mismos. Por ejemplo, “el conjunto de todas las cosas que no son mariposas es una cosa que no es mariposa, luego es un elemento de “el conjunto de las cosas que no son mariposas” o también “el conjunto de todos los conjuntos”.

Así se pueden distinguir dos clases de conjuntos: los que son elementos de sí mismos (llamémoslos Raros) y los que no son elementos de sí mismos (Normales). Formemos el conjunto de todos los conjuntos de Normales (llamémoslo N).

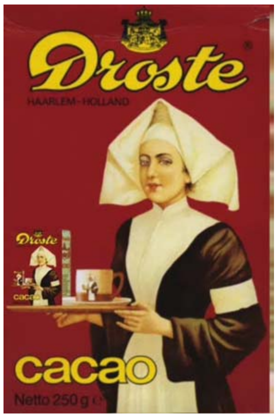
¿N es Normal?

Si N fuese normal, entonces sería un elemento de sí mismo (conjunto de todos los conjuntos normales) y por tanto sería Raro.

Si N fuese Raro, entonces no sería Normal y por tanto no sería elemento de N. Entonces, por no ser elemento de sí mismo, sería Normal.

Ejemplo 6: Una versión más plástica de la paradoja de Russell.

Quizás alguna vez has visto una imagen en la que aparece reproducida ella misma (efecto Droste), en el XX se usó mucho en publicidad. Algo parecido a la escena de los espejos de la película “La dama de Shanghai” de Orson Welles. Puedes conseguir este efecto conectando una cámara de video a la televisión y enfocando con esa cámara a la televisión a la que está conectada.



Podemos clasificar los cuadros existentes en el mundo en dos categorías:

- Cuadros “Normales” que no contienen una reproducción de sí mismos
- Cuadros “Raros” que contienen una reproducción de sí mismos y que seguramente serán muy pocos.

Supongamos reunidos todos los cuadros Normales del mundo en una gran sala. Una vez colgados en la pared, encargamos a un pintor que pinte un cuadro de la sala y de su contenido. Al cuadro lo podríamos llamar “Todos los cuadros normales del mundo”.

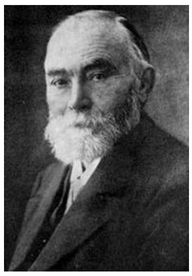
El pintor comenzaría a pintar todos los cuadros expuestos. Una vez terminado con ellos, se preguntaría ¿Debo incluir una reproducción de “Todos los cuadros normales del mundo que estoy pintando?.

Si decide no incluirlo, entonces el cuadro será uno de los normales y por tanto lo debería incluir. Cuando termine de incluirlo, se dará cuenta que entonces el cuadro dejará de ser normal y lo tendrá que borrar. Pero cuando lo haya borrado se percatará de que es normal y lo tendrá que incluir,… y así sucesivamente.

Veamos la contradicción lógica:

- Si el cuadro “Todos los cuadros normales del mundo” es normal, debe contener a “Todos los cuadros normales del mundo” y por tanto no será normal.

- Si el cuadro “Todos los cuadros normales del mundo” no es normal, entonces no está incluido en “Todos los cuadros normales del mundo” y por tanto “Todos los cuadros normales del mundo” es normal.



B. Russell en 1902 escribió a Frege (1848 – 1925) comentándole estas paradojas. Frege, que llevaba toda su vida trabajando en un intento de reducir las matemáticas a la lógica, vio como todo lo que había hecho se venía abajo. Tuvo el valor de reconocerlo y en el último libro, que ya estaba a punto de publicarse cuando recibió la carta de Russel, escribió: "Con nada más indeseable puede enfrentarse un científico que con deshacerse de sus fundamentos después de terminar su obra”. Abandonó su actividad académica, se recluyó en su casa y únicamente escribió algunos artículos. Permaneció en el anonimato, hasta que el propio Russell volvió sobre su obra y dio a conocer sus extraordinarias aportaciones a las Matemáticas.

Del mismo modo que concluimos con el barbero, la teoría de conjuntos habría que modificarla para que no hubiera conjuntos que entre sus elementos estuviese el propio conjunto. Y eso es lo que se hizo.

TEOREMA DE GÖDEL

Volvamos al reto de Hilbert: Construir unos fundamentos matemáticos de manera que con ellos las Matemáticas fueran completas y consistentes.

El propio Hilbert, junto con Ackermann, había escrito en 1928 "Fundamentos de la Lógica Teórica". En ese tratado se hacía una formalización axiomática de la lógica de predicados de primer orden. Se suponía que con esa axiomatización la lógica era completa y consistente.

Siendo un "pipiolo", Kurt Gödel demostró en su tesis doctoral (apenas 11 páginas y publicada en 1930, con 26 años) que la lógica de predicados de primer orden era completa y consistente. Esto fue un espaldarazo a la idea de Hilbert, que se frotaba las manos viendo posible su gran reto. Hoy día sabemos que, si Hilbert hubiese tenido razón, se podrían demostrar con un ordenador convenientemente programado todas las verdades matemáticas. ¡Qué horror!. ¿Dónde quedaría la intuición humana, la creatividad del pensamiento y tantas otras cosas que nos diferencian de una máquina?

Un año más tarde llegó el gran mazazo. Gödel demostró el teorema de incompletitud. "La Aritmética no es completa". Es decir, en la Aritmética existen proposiciones verdaderas que no es posible demostrar.

Se podría pensar que, si con los axiomas existentes la Aritmética no era completa, bastaría con cambiar esos axiomas por otros para que lo fuera. ¡Pues no!. El teorema de Gödel demostraba también que "con cualquier conjunto de axiomas consistentes que se tome, de modo que sea posible la construcción de los números naturales[1], se obtendrá el mismo problema: Se puede construir una afirmación verdadera que no se puede demostrar".

En resumen, no es posible axiomatizar las Matemáticas de modo que sean consistentes y completas. Lo que es lo mismo, si las Matemáticas son consistentes, no son completas y si son completas, no son consistentes.

¿Qué tiene que ver todo esto con las paradojas antes comentadas?. Las paradojas encendieron en Gödel la idea de la imposibilidad de demostrar algo que hace referencia a sí mismo. Usar las matemáticas para demostrar que ellas mismas son completas caía en esa contradicción.

[1] Los números naturales constituyen la base de la Aritmética. Son: 0, 1, 2, 3,...

Enunciado del primer Teorema de Incompletitud de Gödel: “En cualquier formalización consistente de las Matemáticas que sea lo bastante fuerte para definir los números naturales, se puede construir una afirmación verdadera que no se puede demostrar.

Demostración del teorema: Gödel ideó un sistema de codificación (números de Gödel), mediante el cual toda afirmación puede ser expresada mediante números naturales. Posteriormente creó y codificó una afirmación convirtiéndola en una fórmula matemática que hacía referencia a sí misma. Esa afirmación es la que es verdadera y no es demostrable. Se trata de la siguiente:

G: Esta proposición no se puede demostrar.

Veamos que no es demostrable y además es verdadera.

Si G se puede demostrar entonces G es falsa, ya que G asegura que no se puede demostrar.

Por otro lado, si G se puede demostrar, entonces es verdadera, porque todo lo demostrable a partir de unos axiomas consistentes es verdadero.

De suponer que G se puede demostrar llegamos a que G es Verdadera y también es Falsa. ¡Contradicción! Por tanto, G no se puede demostrar.

Queda claro que G no se puede demostrar. Pero si G no se puede demostrar, G es verdadera, ya que lo que dice G es que no se puede demostrar.

Hemos construido una proposición (G) que es verdadera y que no se puede demostrar. ¡Hemos demostrado el teorema de Gödel!

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE GÖDEL

Este teorema se presta a muchas reflexiones.

Las Matemáticas habían sido consideradas el paradigma de la verdad científica. Para muchos, todavía hoy, sólo es verdad aquello que es demostrable. Este teorema supuso la demostración de las limitaciones del método axiomático y en concreto de las Matemáticas. Hágase lo que se haga nunca se podrán demostrar todas las verdades matemáticas.

La otra lectura es más agradable:

Es cierto que las Matemáticas son tan complejas que no las podemos formalizar en un sistema completo; pero somos capaces de descubrir, mediante nuestra intuición, inspiración,…, verdades pertenecientes a la realidad matemática algunas de las cuales incluso no es posible demostrar. En otras palabras, que la actividad de la mente humana no se puede reducir a los algoritmos mecánicos que se utilizan para programar computadoras, como podría llegarse a concluir si realmente fueran completas y consistentes.

DATOS BIOGRÁFICOS SOBRE GÖDEL

Gödel nació el 28 de abril de 1906 en Brno, hoy República Checa, en su día Imperio Austro-Húngaro. Fue un niño enfermizo. Se volvió una persona muy temerosa en todo lo relacionado con la salud. Este aspecto marcaría su vida.

En 1923 ingresó en la Universidad de Viena con intención de estudiar Ciencias Físicas. Viena era un volcán de inquietudes artísticas, científicas y filosóficas. En ese tiempo allí vivían, entre otros, Sigmund Freud, el músico Arnold Schönberg, el arquitecto Adolf Loos y el pintor Oscar Kokoshka. También Wittgenstein vivía en Viena, aunque entonces (ya había publicado su famoso *Tractatus logicus*-philosophicus) estaba retirado y trabajaba como jardinero en un convento.

Aunque no llegó a formar parte de él, Gödel tuvo contactos con el famoso Círculo de Viena, formado por excelentes científicos y filósofos, sobre los que Wittgenstein había tenido gran influencia.

En la Universidad comenzó a aficionarse a las Matemáticas y sobre todo a la Lógica. Se dice que eso fue como consecuencia de participar en un seminario sobre el libro “Introducción a la Filosofía Matemática” de B. Russell.

Presentó la tesis doctoral en 1930, después de hacerse ciudadano austríaco. Esa tesis ocupaba únicamente 11 folios y en ella demostraba que la lógica de predicados de primer orden era completa.

En 1931 hizo público el Teorema de Incompletitud. Con ello adquirió enorme fama y fue invitado a los grandes foros del saber, como Princeton (EE.UU), donde conoció a Albert Einstein del que se hizo muy amigo.

En 1935 se casó con una bailarina de un club nocturno, que cuidó de él maravillosamente. En algunas fases de su vida tuvo serios problemas psiquiátricos. Los acontecimientos en Europa de los años 30 le produjeron depresiones. Acabó huyendo a EE.UU cuando fue llamado a las filas del ejército nazi.

En 1948, establecido ya en Princeton, adquirió la nacionalidad estadounidense. Con el tiempo y sin el apoyo de su amigo Einstein, muerto en 1955, sus problemas psiquiátricos fueron en aumento.

En 1958 publicó su último artículo. En los últimos años de su vida estaba convencido de que los gases que emanaban los radiadores, frigoríficos y otros electrodomésticos eran nocivos y dejó de usarlos.

En 1977 su esposa, que incluso probaba la comida para convencerlo de que no estaba envenenada, tuvo que ser hospitalizada. Temiendo que lo envenenaran, Gödel dejó de comer y murió de desnutrición el 14 de enero de 1977. Apenas pesaba 30 kg.

Murió de hambre en su intento de evitar morir envenenado. ¡Otra gran paradoja!

BIBLIOGRAFÍA:

- **Gödel, Escher, Bach un eterno y grácil bucle** de Gouglas R. Hofstadter. Ed. Tusquets
- **El Teorema de Gödel** de James R. Newman y Ernst Nagel. Ed.Tecnos
- **Gödel. Paradoja y vida** de Rebecca Goldstein. Editorial Antoni Bosch