

Partículas Elementales

Joaquín Gómez Camacho

June 6, 2001

PRÓLOGO

Estos apuntes contienen la materia de la asignatura “Partículas Elementales” que se imparte en el quinto curso de la especialidad de Fundamental de la licenciatura de Físicas de la Universidad de Sevilla.

El objetivo principal de los apuntes es introducir el Modelo Estándar, que es la teoría que describe los componentes fundamentales de la naturaleza y sus interacciones. Se presupone que el lector sabe que la materia está compuesta de electrones, protones y neutrones, y que éstos interactúan entre sí mediante interacciones electromagnéticas, fuertes y débiles según las leyes de la mecánica cuántica. A partir de ahí, se introducen las restantes partículas subatómicas y se describen sus propiedades, su estructura, las partículas elementales que las componen y sus interacciones, de tal forma que, al final, el lector sepa que la materia está compuesta de quarks y leptones, que interactúan por la interacción de color y la interacción electrodébil en el marco de una clase especial de teorías cuánticas de campo llamadas teorías gauge locales.

El capítulo primero contiene una breve introducción histórica que describe la evolución del “paradigma” que describe lo que, en cada momento histórico, se consideraba como los componentes fundamentales de la naturaleza. Esta introducción tiene gran importancia ya que pone en su contexto la importancia del objetivo principal de la asignatura, que no es otro que introducir el Modelo Estándar como paradigma actual de los componentes fundamentales de la naturaleza.

El capítulo segundo describe las propiedades de las partículas utilizando las interacciones que aparecen en física nuclear (fuerte, electromagnética y débil), y la teoría cuántica no relativista. En concreto, se relaciona, usando la regla de oro de Fermi, el tiempo de vida de una partícula con el hamiltoniano de interacción que produce su decaimiento.

El capítulo tercero contiene una descripción fenomenológica de la gran diversidad de partículas subatómicas que se descubrieron a lo largo de este siglo. Entre las partículas subatómicas, los leptones, que no sienten la interacción fuerte, aparecen como partículas elementales. Éstos son el electrón, el muón, la tau y sus neutrinos respectivos. Los hadrones, que sienten la interacción fuerte, no son elementales. Han de introducirse una serie de números cuánticos (número bariónico, extrañeza, isospín) para realizar una clasificación preliminar de los hadrones.

En el capítulo cuarto se introduce la descripción de la interacción entre las partículas subatómicas usando la teoría cuántica de campos. Esta sección es breve, ya que se supone que la mayoría de los estudiantes han cursado un asignatura específica de teoría cuántica de campos. Si este no fuera el caso, debería ampliarse esta sección para incluir el concepto de segunda cuantización y los diagramas de Feynmann.

En el capítulo quinto se describen las simetrías discretas C, P y T en mecánica clásica, mecánica cuántica y teoría cuántica de campos, exponiendo sus consecuencias observables, así como las evidencias de su violación por la interacción débil.

El capítulo sexto se dedica a introducir los conceptos relevantes de la teoría de grupos. Se introducen con el suficiente rigor y generalidad los conceptos de representaciones irreducibles, los operadores tensoriales y el teorema de Wigner-Eckart. Se estudia en detalle el grupo simétrico $S(N)$.

En el capítulo séptimo se estudian los grupos de Lie, introduciendo los generadores. Se estudian en detalle los grupos unitarios $U(1)$, $SU(2)$ y $SU(3)$, utilizando los diagramas de Young.

Estos dos capítulos son autocontenidos, de forma que pueden servir para otras asignaturas (física atómica, física nuclear, estado sólido) en las que se usa la teoría de grupos. Por otro lado, estos capítulos podrían resumirse u omitirse para estudiantes que hubieran dado un curso específico de teoría de grupos.

El capítulo octavo trata del modelo $SU(3)$ de sabor. El modelo $SU(3)$ de sabor es un modelo fenomenológico que explota el hecho de que los hadrones pueden agruparse en multipletes que generan representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$. De esta forma, se obtienen las fórmulas de masas, probabilidades de decaimiento y muchas relaciones entre las propiedades de las partículas de un mismo multiplete.

El capítulo noveno trata del modelo de quarks. El modelo de quarks surge del modelo $SU(3)$ al asignarle entidad física a los estados de la representación fundamental del grupo $SU(3)$. De esta manera, aparecen los quarks u , d y s . Los quarks pesados c , b y t se descubrieron posteriormente. Es destacable la capacidad del modelo de quarks para describir los momentos magnéticos de los bariones. Una vez que se describen los hadrones como entes compuestos de quarks, las interacciones de los hadrones han de referirse a las de los quarks que los componen. De esta forma, aparece la interacción de color entre los quarks.

El capítulo décimo y último trata de las teorías gauge locales. Se describe explícitamente cómo la exigencia de la invariancia del lagrangiano de un sistema de fermiones sin interacción frente a transformaciones gauge locales lleva a la aparición de unos campos gauge, asociadas a partículas de espín uno y masa nula, que interactúan con los fermiones y entre sí de forma totalmente determinada por las propiedades del grupo de simetría. Esto permite describir las propiedades de la interacción electromagnética, en la electrodinámica cuántica, y la interacción de color, en la cromodinámica cuántica. Para describir la interacción débil, en el que las partículas asociadas a los campos tienen masa, se introduce el mecanismo de Higgs de ruptura espontánea de la simetría. Ello lleva a una descripción unificada de las interacciones débiles y electromagnéticas en la teoría electrodébil. El Modelo estándar aparece como la teoría que describe las interacciones entre los constituyentes elementales, que son los quarks y los leptones, mediante en intercambio de los bosones gauge de la teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica, en un marco formal de teorías gauge locales.

Los apuntes están concebidos como un libro de texto, en el cual los conceptos están con frecuencia expresados en forma escueta, para ser explicados en clase. No obstante, los desarrollos formales que contiene están detallados suficientemente. Además, el libro contiene muchos ejercicios propuestos, que son aplicación de la teoría. Este libro se sacrifica la extensión en aras de la profundidad. Así, el libro no pretende ser una introducción a la vasta fenomenología de la física de altas energías, sino dar una descripción en profundidad de la naturaleza de los constituyentes elementales de la materia y sus interacciones.

Una bibliografía complementaria a estos apuntes es la siguiente:

- Burcham and Jobes, Nuclear and Particle Physics, Longman 1995.
- Feynman, Electrodinámica Cuántica, Alianza Editorial.
- Partículas Elementales, Libros de Investigación y Ciencia, Labor.
- Particle Physics Booklet, Springer, 1998.
- Jones, Groups, Representation and Physics, Adam Hilger, 1990.

- Close, An introduction to quarks and partons, Academic Press, 1979.
- Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood, 1981.
- Cheng and Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Oxford University Press, 1991.

Direcciones interesantes de internet son las siguientes:

- The particle Adventure: <http://ParticleAdventure.org/>
- Particle Data Group: <http://pdg.lbl.gov/>
- CERN: <http://cern.web.cern.ch/CERN/>

Joaquín Gómez Camacho

Agosto de 1999

Versión revisada: Octubre de 2000. Junio de 2001.

Contents

1	Introducción Histórica a las Partículas Elementales	7
1.1	El paradigma de la física antigua	7
1.2	El paradigma de la física clásica	9
1.3	El paradigma de la física moderna	10
1.4	El paradigma de la física actual	12
2	Decaimiento y colisiones de partículas	15
2.1	Interacciones	15
2.1.1	Interacción electromagnética	15
2.1.2	Interacción fuerte	15
2.1.3	Interacción débil	16
2.2	Decaimiento	16
2.2.1	Densidad de estados	17
2.2.2	Estimación de las probabilidades de emisión	18
2.2.3	Teoría de Fermi de la interacción débil	19
2.3	Secciones eficaces	20
2.4	Problemas	21
3	Propiedades de las partículas elementales	22
3.1	Introducción	22
3.2	Leptones	23
3.3	Hadrones	25
3.3.1	Número bariónico	25
3.3.2	Extrañeza	25
3.3.3	Isospín.	26
3.3.4	Isospín de sistemas de partículas	27
3.4	Partículas estables y resonancias.	27
3.5	Conservación de números cuánticos	28
3.5.1	Relación entre las probabilidades de decaimiento	29
3.5.2	Relación entre secciones eficaces	30
3.6	Problemas	30
4	Interacciones en una teoría cuántica de campos	33
4.1	Interacción fuerte	34
4.2	Interacción electromagnética	35
4.3	Interacción débil	36
4.3.1	Procesos leptónicos.	36
4.3.2	Procesos semi-leptónicos.	37

4.3.3	Procesos no-leptónicos.	37
4.3.4	Teoría del bosón vectorial intermedio.	38
4.4	Problemas	39
5	Simetrías discretas	40
5.1	Simetrías discretas en mecánica clásica	41
5.2	Simetrías discretas en mecánica cuántica no relativista	42
5.2.1	Inversión espacial	42
5.2.2	Conjugación de carga	42
5.2.3	Inversión temporal	43
5.3	Simetrías discretas en teoría cuántica de campos	43
5.3.1	Inversión espacial	43
5.3.2	Conjugación de carga	44
5.3.3	Inversión temporal	45
5.4	Paridad y conjugación de carga de sistemas de partículas	45
5.4.1	Sistemas de fotones	45
5.4.2	Sistemas fermión-antifermión	45
5.4.3	Sistemas bosón-antibosón	46
5.4.4	Partículas totalmente neutras	46
5.5	Conservación y violación de las simetrías discretas	46
5.5.1	Violación de la paridad P por la interacción débil	47
5.5.2	El teorema CPT	48
5.5.3	Los kaones neutros. Violación de CP	49
5.6	Problemas	50
6	Teoría de Grupos	52
6.1	Introducción	52
6.2	Propiedades generales	53
6.3	Representación de grupos	54
6.4	Representación Producto	56
6.5	Operadores tensoriales	57
6.6	Ejemplos de grupos discretos	59
6.6.1	Grupo S(2)	59
6.6.2	Grupo S(3)	60
6.6.3	Grupo S(n)	61
6.7	Problemas	63
7	Grupos de Lie	64
7.1	Generadores	64
7.2	Grupo U(1)	66
7.3	Grupo U(2)	66
7.4	Grupo SU(2)	67
7.5	Grupo SU(3)	68
7.5.1	Representaciones irreducibles de SU(3)	69
7.5.2	Caracterización de los estados. Diagramas de pesos.	70
7.5.3	Caracterización de los generadores. Diagramas de raíces.	71
7.5.4	Representaciones principales de SU(3)	71
7.5.5	Descomposición de representaciones producto de SU(3)	72

7.6	Problemas	73
8	Modelo SU(3) de sabor	74
8.1	Octetes, decupletes y singletes de hadrones	74
8.2	Fórmulas de masas	75
8.3	Mezcla de representaciones	77
8.4	Aplicaciones de la simetría SU(3)	77
8.4.1	Decaimiento fuerte de hadrones	77
8.4.2	Constantes de acoplamiento fuerte	78
8.4.3	Constantes de la corriente débil	78
8.5	Problemas	78
9	Modelo de Quarks	80
9.1	Los quarks como representación fundamental de SU(3) de sabor	80
9.1.1	Funciones de onda de sabor de los hadrones	81
9.1.2	Los quarks como fermiones: el color	83
9.1.3	Momento magnético	84
9.2	Interacciones entre quarks	86
9.2.1	Interacción fuerte.	86
9.2.2	Interacción electromagnética.	87
9.2.3	Interacción débil. Ángulo de Cabibbo. Matriz CKM.	87
9.3	Quarks pesados	88
9.3.1	Quark c	88
9.3.2	Quark b	88
9.3.3	Quark t	88
9.4	Evidencias experimentales de los quarks	89
9.4.1	Experimentos de análisis	89
9.4.2	Experimentos de síntesis	90
9.5	Problemas	91
10	Teorías Gauge Locales	92
10.1	Estructura general de las teorías gauge locales	92
10.2	Electrodinámica cuántica: grupo U(1)	93
10.3	Cromodinámica cuántica: grupo SU(3)	95
10.4	Teoría preliminar para la interacción electro-débil: grupo U(2)	98
10.5	Mecanismo de Higgs de ruptura espontánea de la simetría	102
10.5.1	Mecanismo de Higgs en una teoría U(1)	102
10.5.2	Mecanismo de Higgs en una teoría U(2)	104
10.6	Teoría Electrodébil	105
10.7	El Modelo Estándar	107
10.7.1	Partículas Elementales	107
10.7.2	Interacciones	107
10.7.3	Marco teórico	108
10.8	Problemas	108

Chapter 1

Introducción Histórica a las Partículas Elementales

1.1 El paradigma de la física antigua

La ciencia, tal como la conocemos actualmente, parte de la cultura griega. Fue la civilización griega la primera que se planteó una descripción de la naturaleza que no estuviera totalmente condicionada a la actuación de seres sobrenaturales. En este sentido, algunas contribuciones fundamentales al desarrollo de la ciencia fueron las siguientes:

Thales: (Mileto, Asia Menor, 624-548 a.c.)

Estableció que la naturaleza, a pesar de la gran variedad que presenta, puede ser comprendida, si es observada cuidadosamente. Planteó que todas las sustancias estaban formadas por un principio único, que identificó con el agua, ya que ésta podía presentarse como sólido, líquido o gas.

Pitágoras: (Crotona, Napoles, 580-500 a.c.)

Además del famoso teorema, descubrió que las subdivisiones enteras o racionales de una cuerda producían sonidos musicales armoniosos. Ello llevó a la idea de que la descripción de los fenómenos de la naturaleza podía, y debía, hacerse en términos de números. Es más, los pitagóricos pensaban que los números estaban en la esencia de todas las cosas.

Los pitagóricos sabían que la tierra era redonda, aunque consideraban que no era habitable mucho más allá de la zona del mediterráneo. La tierra, el sol, la luna y los planetas giraban en torno a un “fuego central” del cual recibía el sol su luz, de la misma forma que la luna.

Empédocles: (Acragas, Sicilia, 490-430 a.c.)

Planteó que no podía haber un principio único del que todas las cosas estuvieran compuestas, ya que en la naturaleza había propiedades contradictorias. Por ejemplo, existen cosas secas y húmedas. Como el agua es intrínsecamente húmeda, no puede ser el principio único. Por ello, estableció que existían cuatro elementos: Agua, Tierra, Aire y Fuego. Estos elementos tenían propiedades opuestas. Agua y Tierra son pesados, mientras que Aire y Fuego son ligeros. Por otro lado, Agua y Aire son húmedos, mientras que Fuego y Tierra son secos. Todas las sustancias conocidas estaban compuestas de estos elementos en distintas proporciones.

Los elementos se unían o separaban por dos “interacciones”. El “Amor” tendía a unir los elementos, mientras que el “Odio” los separaba. La naturaleza, con todas sus diferentes manifestaciones, surgía del equilibrio entre estas interacciones.

Demócrito: (Abdera, Tracia, 460-370 a.c.)

Estableció que todas las cosas estaban compuestas de átomos. Estos átomos eran pequeños, indivisibles, de distintas formas y tamaños, pero compuestos por la misma sustancia. Los átomos estaban en continuo movimiento, y estaban separados por el vacío. La gravedad se explicaba por un movimiento de rotación, que hacía que los átomos más grandes, que correspondían a sustancias más pesadas, tendieran a irse hacia el centro de la tierra, mientras que los más ligeros iban hacia fuera. Incluso el alma estaba compuesta de un tipo de átomos especialmente ligeros, distribuidos por todo el cuerpo de los seres vivos.

Aristóteles: (Atenas, 384-322 a.c.)

La obra “Física” de Aristóteles tiene una aplicación mucho más amplia de lo que actualmente se entiende por el término. Partiendo del concepto de sustancia (inmutable) y forma (cambiante), Aristóteles describe el movimiento como un tipo de cambio.

Aristóteles describe el universo con la tierra (esférica) en su centro. Separa el universo en la esfera terrestre, situada por debajo de la órbita de la luna, y la esfera celeste, situado por encima de la luna, incluyendo ésta. El movimiento de los astros en la esfera celeste era inmutable, y se describía en función de círculos, que eran las figuras perfectas para los griegos. El movimiento en la esfera terrestre venía descrito por líneas rectas. Dentro de este movimiento, se distinguen los movimientos naturales, por los cuales los objetos pesados (Agua y Tierra) se dirigen hacia el centro de la tierra, mientras que los objetos ligeros (Fuego y Aire) se dirigen hacia arriba, y los movimientos forzados, que requieren una causa externa.

Aristóteles considera que, en los movimientos forzados, es necesaria una causa que provoque el movimiento, de tal manera que, cuando cesa la causa, cesa el movimiento. Así, la velocidad sería proporcional a la fuerza, e inversamente proporcional a la resistencia del medio. Por ello, Aristóteles no admitía la existencia del vacío, ya que implicaría una resistencia nula. Por tanto, no aceptaba la teoría atómica de los átomos de Demócrito, aunque asumía plenamente la teoría de los cuatro elementos de Empédocles.

La descripción de los movimientos forzados requería de una causa o “motor” para cada movimiento. El movimiento del “motor”, a su vez, debe estar causado por otro “motor”. De esta manera, se llega a una última causa o “Motor” inmóvil, en el que está el origen de todo movimiento. Este “Motor” es Dios, y sus propiedades vienen descritas en el libro Octavo de la “Física”. La Teología es, por tanto, para Aristóteles, una rama de la Física.

La Física de Aristóteles, junto con los cuatro elementos de Empédocles, han constituido el paradigma básico del saber científico durante casi 2000 años. Basados en este paradigma, Arquímedes descubrió las leyes de la palanca, y el principio que lleva su nombre. Ptolomeo describió el movimiento celeste con gran precisión. Las religiones monoteístas encontraron una base científica sólida. Los cuatro elementos constituían la base natural para descripción de los fenómenos de una sociedad basada en la agricultura, ya que tierra, agua, aire y fuego (luz solar) son los ingredientes necesarios para la agricultura. Del mismo modo, las variaciones estacionales en la agricultura pueden entenderse

como ciclos en que domina el “amor” (primavera y verano, en que los elementos se combinan para que crezcan las plantas y los frutos), o el “odio” (otoño e invierno, en que las plantas se secan, y los elementos que las constituyeron se separan).

En este contexto, no es sorprendente el empeño de los alquimistas medievales en la transmutación de las sustancias. Si todas las sustancias estaban hechas de los cuatro elementos, podía pasarse de plomo (o de cualquier otra sustancia) a oro añadiendo la proporción adecuada de fuego, aire, agua y tierra. El paradigma de la física antigua no se vio sustancialmente modificado durante la edad media, aunque es destacable el desarrollo de conceptos filosóficos que precedieron al renacimiento. Entre ellos cabe destacar a Guillermo de Occam, que planteó su principio, denominado “la navaja de Occam”: *Pluribus non est ponenda sine necessitate*. No debe presuponerse la multiplicidad sin necesidad. Éste es un principio básico en el desarrollo de la ciencia hasta nuestros días.

De forma esquemática, podemos resumir el paradigma de la física antigua como sigue:

Elementos: Tierra, Agua, Aire y Fuego.

Interacciones: Amor y Odio. Fuerzas exteriores.

Marco Teórico: Física de Aristóteles.

1.2 El paradigma de la física clásica

La sustitución del paradigma de la física antigua por lo que conocemos por la física clásica, fue una evolución gradual entre los siglos XVI y XIX. Los hitos más importantes son los siguientes:

Copérnico: (Cracovia, 1473-1543)

Estableció el sistema heliocéntrico. Este ya había sido propuesto por Aristarco de Samos hacia el 280 a.c., aunque no se aceptó.

Galileo: (Pisa, 1564-1642)

Estableció el principio de que las propiedades de los sistemas son las mismas si están en reposo o en movimiento uniforme. También formuló la ley de la inercia, por la cual los cuerpos tienden a mantener su movimiento en ausencia de acciones externas.

Newton: (Cambridge, 1642-1727)

Desarrolló (con Leibnitz) el cálculo diferencial, lo que permitía una descripción formal de las leyes físicas, más allá de la geometría que era el instrumento de los científicos anteriores.

Formuló sus tres leyes. La primera ya había sido planteada por Galileo. La segunda establecía que la fuerza era proporcional a la aceleración, y no a la velocidad. Nótese que la diferencia estricta entre aceleración y velocidad pudo plantearse a partir del desarrollo del cálculo diferencial. La tercera, la ley de acción y reacción, hacía que no fuera necesaria una cadena de relaciones causales para provocar el movimiento.

Finalmente, planteó la ley de la gravitación universal, lo cual permitía borrar la separación entre esferas celeste y terrestre. Todo el universo, por tanto, satisfacía las mismas leyes.

Lavoisier: (París, 1747-1794)

Consiguió descomponer el agua en hidrógeno y oxígeno, así como recomponerla. Por otro lado descubrió que la combustión se debía a la combinación de las sustancias con el oxígeno. Previamente, se había considerado que los cuerpos, al arder, emitían una sustancia llamada Flogisto. Esto era la prueba definitiva de que los elementos de Empédocles no eran realmente fundamentales. Por otro lado, comprobó que en las reacciones químicas se conservaba la cantidad total de materia.

Dalton: (Manchester, 1766-1844)

Planteó la teoría atómica, partiendo del hecho de que las reacciones químicas entre gases ocurrían en proporciones sencillas de volumen. Obtuvo la relación de las masas atómicas de varios elementos con la del hidrógeno. Posteriormente, el desarrollo de la teoría cinética de los gases, justificó plenamente la teoría atómica, cuya base había sido ya planteada por Demócrito.

Maxwell: (Cambridge, 1831-1879)

Unifica la descripción de los fenómenos eléctricos y magnéticos, así como la luz y otras radiaciones electromagnéticas en función de campos eléctricos y magnéticos, que satisfacen las ecuaciones que llevan su nombre.

Mendeleev: (San Petersburgo, 1834-1907)

Clasifica los elementos, que son cerca de 90, en la tabla periódica. De esta forma, se correlaciona el peso atómico con las propiedades químicas de los elementos.

El panorama de la ciencia a finales del siglo XIX era brillante. La ciencia constituía una base para las necesidades tecnológicas de la revolución industrial. Las leyes de Newton se veían plenamente confirmadas por observaciones astronómicas. Se desarrollaban las aplicaciones prácticas de la electricidad. La química progresaba a partir de la base de la teoría atómica, aunque la naturaleza de las interacciones entre los átomos, el enlace químico, no fuera bien comprendida. La biología y la medicina se iban despojando de principios vitalistas, y se beneficiaban de los avances de la física y la química.

Esquemáticamente, el paradigma de la física clásica puede expresarse como sigue:

Elementos: 90 elementos de la Tabla Periódica.

Interacciones: Gravitación. Electromagnetismo. Enlace químico.

Marco Teórico: Física Clásica (Leyes de Newton).

1.3 El paradigma de la física moderna

Aunque la ciencia clásica sigue siendo de plena validez en muchos campos, sus fundamentos tuvieron que ser modificados en función de descubrimientos realizados a finales del siglo XIX y principios del siglo XX.

Thompson:

Descubre el electrón en 1897. Plantea el primer modelo del átomo, pero no consigue describir adecuadamente el espectro de absorción y emisión.

Becquerel: (París, 1852-1908)

Descubre la radiactividad (1896). Las radiaciones descubiertas se identifican posteriormente con partículas cargadas extraordinariamente energéticas.

Planck: (Berlín, 1858-1947)

Plantea la hipótesis de los cuantos (1900) para explicar el espectro de emisión del cuerpo negro.

Rutherford: (Manchester, 1871-1937)

Descubre el núcleo atómico (1911). Plantea el modelo planetario del átomo, aunque no es compatible con el electromagnetismo. Identifica la radiación α como núcleos de helio. Produce la primera reacción nuclear $\alpha + {}^{14}\text{N} \rightarrow p + {}^{17}\text{O}$: La transmutación de los elementos, que era el sueño de los alquimistas, se había logrado.

Bohr: (Copenhague, 1885-1962)

Aplica los cuantos al modelo de Rutherford (1913), consiguiendo explicar satisfactoriamente la absorción y emisión de luz por los átomos. Contribuye de forma fundamental al desarrollo de la física atómica y de la física nuclear.

Heisenberg: (Munich, 1901-1976)

Formula el principio de indeterminación, por el cual no es posible conocer con precisión el valor de la coordenada y el momento de una partícula. Desarrolla la mecánica matricial (1925) para describir la emisión de radiación.

Schrödinger: (Viena, 1887-1961)

Propone la ecuación que lleva su nombre (1926), para describir el estado de los sistemas cuánticos.

Pauli:

Plantea el principio de exclusión, que es básico para interpretar la estructura de átomos poliatómicos. Postula en 1931 la existencia del neutrino, para justificar la conservación de la energía en el decaimiento beta.

Chadwick: (Manchester, 1891-1974)

Descubre el neutrón en 1932, con carga neutra y masa parecida al protón. Ello permite explicar que las masas atómicas fueran aproximadamente múltiplos de la del átomo de hidrógeno.

Fermi: (Roma, 1901-1954)

Plantea la primera teoría de la interacción débil (1930) que es capaz de explicar el espectro de emisión de electrones en el decaimiento beta.

Einstein:

Explica el efecto fotoeléctrico (1905), aplicando la teoría de los cuantos. Introduce la teoría especial de la relatividad (1905), que modifica la concepción del tiempo y el espacio, y correlaciona masa y energía, y la teoría general de la relatividad, que explica la gravitación como una curvatura espacio-temporal.

El descubrimiento por Einstein de la relatividad especial y general suponen una modificación muy importante del paradigma clásico, aunque, más que invalidarlo, lo llevan a su plenitud. La relatividad especial establece que las leyes de transformación que dejan invariante un sistema no son las transformaciones de Galileo, que ya entraban en conflicto con las ecuaciones de Maxwell, sino las transformaciones de Lorentz. La relatividad general justifica la igualdad entre la masa inercial y la gravitatoria, que era un hecho empírico

en la gravitación de Newton. Además, la relatividad general predice la curvatura de la luz en campos gravitatorios.

Los descubrimientos asociados con la física cuántica suponen una revolución en el paradigma clásico. El principio de indeterminación hace que las leyes de Newton no sean aplicables para el átomo o el núcleo. En su lugar, debe aplicarse la ecuación de Schrödinger.

El paradigma de la ciencia moderna tiene hoy en día una aplicabilidad plena en la inmensa mayoría de los campos de la ciencia. Los fundamentos del enlace químico están justificados por la descripción cuántica del movimiento de electrones en átomos y moléculas. Del mismo modo, la interacción de los electrones con una red cristalina es la base de la física del estado sólido. Para estas ciencias, la interacción electromagnética está en el origen de todos los fenómenos. Por otro lado, la gran mayoría de los fenómenos en física nuclear pueden describirse en este paradigma, aunque el origen de la interacción fuerte y la débil no queda plenamente justificado. La astrofísica (evolución estelar, estrellas de neutrones, supernovas) también se describe en este paradigma.

El paradigma de la física moderna que se establece sobre 1940 puede describirse como sigue:

Elementos: Electrón, protón, neutrón, (neutrino).

Interacciones: Gravitación, electromagnetismo, interacción fuerte, interacción débil.

Marco Teórico: Física cuántica (Ecuación de Schrodinger)

1.4 El paradigma de la física actual

El paradigma de la ciencia moderna, aunque plenamente aplicable hoy en día en la mayoría de los campos científicos, resultó insuficiente como base para describir las partículas y las interacciones realmente fundamentales. Las contribuciones principales que llevaron a su cuestionamiento fueron las siguientes:

Dirac: (Cambridge 1902-1984)

Plantea una ecuación cuántica en que la función de onda es compatible con la relatividad especial. Ello le lleva a postular la existencia de una antipartícula para cada partícula de espín semi-entero. En 1928 postula la existencia del positrón, que es descubierto en 1932. Sienta las bases de la electrodinámica cuántica como una teoría cuántica de campos, en la que la interacción electromagnética se produce por intercambio de fotones.

Yukawa: (Tokio 1907-1981)

Aplicando la teoría cuántica de campos a la interacción fuerte, deduce que debe existir una partícula que transmite la interacción fuerte, cuya masa es inversamente proporcional al rango de la interacción $m = \hbar c/a$. Por ello, del rango de la interacción fuerte (1 fm), deduce la existencia de partículas de masa sobre 200 MeV, que llama mesones (1935).

Descubrimiento de Partículas:

Analizando los rayos cósmicos en la cámara de niebla, se descubre en 1937 el muón, de masa 107 MeV, pero no puede corresponder a la partícula predicha por Yukawa, porque no interactúa con la materia por la interacción fuerte. En 1947 se descubren los piones de masa 140 MeV, que sí se adecúan a los mesones de Yukawa. Poco después, se descubren otras muchas partículas, algunas de masas intermedias entre los piones y los protones,

como los mesones K ($m=500$ MeV), y otras más pesadas que el protón, llamadas hiperones, como la Λ ($m=1110$ MeV). Estas partículas, son inestables, y se descomponen en tiempos del orden de 10^{-8} segundos para dar protones, neutrones, electrones (o positrones) y neutrinos.

Posteriormente, con el desarrollo de los aceleradores de partículas, se producen muchas más partículas, de vida cada vez más corta.

Feynmann: (Boston (MIT) 1918-1988)

Con Schwinger, Tomonaga y muchos otros, contribuye al desarrollo de la teoría cuántica de campos en general, y de la electrodinámica cuántica en particular. Esta teoría permite describir la relación del momento magnético del electrón con su carga y su masa con una precisión de 10 cifras significativas. Además, es una teoría de tipo “Gauge Local”, que sirve de modelo para las teorías del resto de las interacciones.

Gell-Mann: (Chicago 1929-)

Él y Zweig, de forma independiente, plantean el modelo de quarks (1963), que permite describir la gran variedad de partículas elementales (mesones y bariones) en términos de unas partículas fundamentales llamadas quarks. Esta hipótesis recibió apoyo experimental en experimentos de colisión electrón-nucleón a altas energías (1968).

Weinberg: (Harvard 1933-)

Con Salam, plantean en 1967 una teoría unificada “Gauge Local” que permite describir la interacción electromagnética y la interacción débil. Predicen la existencia de nuevas partículas, los bosones W^\pm y Z^0 , que junto con el fotón describen las interacciones electro-débiles. Las predicciones de la teoría electrodébil se ven confirmadas por el descubrimiento experimental de estos bosones.

Cromodinámica Cuántica:

La interacción que liga a los quarks cristaliza en una teoría “Gauge Local”, que adquiere su formulación definitiva en 1973, y que relaciona la interacción a una propiedad de los quarks llamada color, y esta asociada a ocho partículas sin masa llamados gluones. La cromodinámica cuántica no puede tratarse de forma perturbativa a energías pequeñas, pero a energías altas se reduce, lo cual ha permitido verificar experimentalmente sus predicciones.

El paradigma de la ciencia actual, que se establece sobre 1975, y se conoce como “Modelo Estándar”, puede describirse de forma abreviada como sigue:

Elementos: Quarks (u, d, s, c, b, t), con tres colores cada uno, y leptones (e, ν_e , μ , ν_μ , τ , ν_τ). Falta por descubrir el bosón de Higgs.

Interacciones: Interacción electro-débil (γ , W^+ , W^- , Z^0), interacción de color (8 gluones) y Gravitación.

Marco Teórico: Teorías Gauge Locales.

El Modelo Estándar presenta una descripción especialmente elegante y simple de las interacciones: estas interacciones aparecen como consecuencia de la simetría de los sistemas frente a un conjunto de transformaciones. Las propiedades de la interacción quedan totalmente determinadas por el grupo de simetría, y su intensidad viene dada por una

constante (o dos en el caso de la teoría electrodébil. La teoría de la gravitación de Einstein, aunque es una teoría clásica, es una teoría gauge local. En este caso, el grupo de simetría corresponde a las transformaciones de Lorentz. El campo gravitatorio preserva esta simetría haciendo, por ejemplo, que un sistema en movimiento acelerado sea completamente equivalente a un sistema en reposo más un campo gravitatorio.

El Modelo Estándar ha sido avalado por un gran número de observaciones realizadas en los aceleradores de altas energías. Recientemente, se observó experimentalmente el último quark predicho, el top (t), y solamente falta encontrar una partícula, el boson de Higgs, que es responsable de la masa no nula de los bosones de la interacción débil y de los fermiones. Existen evidencias de que no hay más neutrinos sin masa de los tres que se han hallado, por lo que no debe haber más familias de partículas.

El modelo estándar ha permitido avances importantes en la cosmología, porque permite inferir la evolución del universo a partir de una fracción de segundo después de la gran explosión.

Aunque la cromodinámica cuántica debería ser capaz de dar las masas de todos los hadrones (partículas compuestas de quarks), y de las interacciones entre ellos, el carácter no perturbativo de la teoría dificulta estos cálculos, por lo que no hay todavía resultados fiables de estas magnitudes. Ello limita la aplicabilidad de la cromodinámica cuántica en la física nuclear.

Chapter 2

Decaimiento y colisiones de partículas

El paradigma de la física moderna incluye a protón, neutrón, electrón y neutrino como partículas fundamentales. Considera las interacciones gravitatoria, electromagnética, fuerte y débil. La primera es irrelevante para la física nuclear o de partículas. Las demás son consideradas en el marco de la teoría cuántica.

El desarrollo de este paradigma lleva a una descripción detallada de la estructura de átomos y núcleos atómicos. También puede describirse el decaimiento de estos sistemas, y las colisiones entre ellos.

2.1 Interacciones

Vamos a describir las características cualitativas de las interacciones:

2.1.1 Interacción electromagnética

Ocurre entre partículas cargadas, y tiene un largo alcance. El potencial escalar viene dado por la expresión

$$V(r) = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

donde $e^2/4\pi\epsilon_0 = 1.44 \text{ MeV fm}$. Para distancias típicas de 1 fm, la interacción entre dos partículas de carga unidad es del orden de 1 MeV. Así, podemos expresar $\langle H_{em} \rangle \simeq 1 \text{ MeV}$, como una medida del orden de magnitud de la interacción electromagnética.

2.1.2 Interacción fuerte

Ocurre entre protones y neutrones, es una interacción atractiva, y es responsable de que protones y neutrones formen núcleos atómicos. La interacción tiene un alcance del orden de 1 fm. La interacción fuerte tiene una dependencia complicada con la distancia, depende de la orientación de los espines, de la energía y del momento angular. No obstante, en muchos casos, pueden utilizarse parametrizaciones simples de la interacción fuerte. Por ejemplo, puede usarse un pozo cuadrado,

$$V(r) = -V_0 \quad r < R \quad ; \quad V(r) = 0 \quad r > R,$$

o bien una forma de tipo Yukawa:

$$V(r) = -V_0 \frac{\exp(-r/R)}{r/R}$$

Los parámetros R y V_0 se obtienen ajustando datos experimentales, tales como la energía de ligadura y el radio del deuterón, que es un estado ligado de protón y neutrón.

El parámetro R es del orden de 1 fm, y para obtener una estimación de V_0 basta considerar que la interacción debe ser suficiente para formar un estado ligado de protón y neutrón. Esto lleva, para el potencial de pozo cuadrado, a la relación

$$V_0 R^2 \geq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu} \quad (2.1)$$

Esta desigualdad se convierte en igualdad cuando la energía de ligadura del deuterón puede despreciarse frente a V_0 . Para $R = 1 \text{ fm}$, se obtiene $V_0 = 103 \text{ MeV}$, que es mucho mayor que la energía de ligadura del deuterón $B = 2.22 \text{ MeV}$. Por tanto, podemos concluir que $\langle H_f \rangle \simeq 100 \text{ MeV}$, como una estimación de la interacción fuerte.

2.1.3 Interacción débil

La interacción débil es la responsable del decaimiento de un neutrón libre: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$. La partícula $\bar{\nu}$, o antineutrino, es una partícula sin carga ni masa en reposo que se mueve con la velocidad de la luz, que fué postulada para que se cumpliera la conservación de la energía, y se detectó experimentalmente muchos años después. Otros procesos posibles debidos a la interacción débil son: $n + \nu \rightarrow p + e^-$ (interacción de neutrinos), $p + e^- \rightarrow n + \nu$ (captura electrónica), $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ (emisión β^+). Estos últimos procesos no puede darse para un protón libre, porque no se conservaría la energía, pero sí puede ocurrir en un protón que se halla dentro de un núcleo atómico.

Estos procesos pueden describirse en la teoría de Fermi de la interacción débil introduciendo un término en el hamiltoniano que se expresa como

$$H_w = G_F \delta^3(\vec{r})(\tau^+ + \tau^-)$$

donde τ^+ es un operador que transforma un neutrón en protón, y crea o aniquila electrones y neutrinos conservando la carga eléctrica y el número leptónico, que veremos posteriormente. τ^- es el operador conjugado. Explícitamente, se tiene

$$\langle p | \tau^+ | n, e^+, \nu \rangle = \langle p, \bar{\nu} | \tau^+ | n, e^+ \rangle = \langle p, e^- | \tau^+ | n, \nu \rangle = \langle p, e^-, \bar{\nu} | \tau^+ | n \rangle = 1$$

y el resto de los elementos de matriz son nulos. La constante de Fermi G_F toma el valor de $89.62 \cdot 10^{-6} \text{ MeV fm}^3$. La función δ indica que la interacción débil tiene un alcance mucho más corto incluso que la interacción fuerte, y ésto se manifiesta en la distribución de los momentos de las partículas producidas por la interacción débil.

Una estimación del valor de la interacción débil se obtiene promediando su efecto sobre un volumen de 1 fm^3 , con lo cual se tiene $\langle H_w \rangle \simeq 10^{-4} \text{ MeV}$.

2.2 Decaimiento

En mecánica cuántica, una partícula inestable, o un sistema compuesto que tenga una energía suficiente puede descomponerse o decaer, produciendo varios fragmentos (partículas

o fotones). Para describir este proceso, se descompone el ζ hamiltoniano $H = H_0 + H'$. H_0 es la parte del hamiltoniano que define la partícula o el sistema, de forma que es un autoestado de H_0 . H' es la parte del hamiltoniano que produce el decaimiento.

La probabilidad por unidad de tiempo de que se produzca el decaimiento viene dada por la regla de oro de Fermi:

$$W_{i,f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle i|H'|f \rangle|^2 \rho(E)$$

donde $\langle i|H'|f \rangle$ es el elemento de matriz de la parte del hamiltoniano responsable del decaimiento, entre el estado inicial i y el estado final f en el que se ha emitido los fragmentos, y $\rho(E)$ es la densidad de auto-estados de H_0 que pueden producirse tras el decaimiento, es decir, el número de estados finales entre E y $E + dE$, dividido por dE . Nótese que si un sistema puede decaer, su vida media τ viene dada por $1/W_{i,f}$, y su energía tendrá una indeterminación caracterizada por $\Gamma = \hbar W_{i,f}$.

2.2.1 Densidad de estados

Decaimiento en dos partículas. Caso general

Consideremos una partícula A que se desintegra en B + C. En el proceso se libera una energía total $E = M(A)c^2$, y una energía cinética $E_c = (M(A) - M(B) - M(C))c^2$. Sea \vec{P} es el momento de B, que es igual y de signo contrario al de C. Nótese que si se especifica el valor de \vec{P} , se determina el estado tanto de B como de C. Supongamos que B y C se confinan a un volumen $\Omega = L^3$ (L se tomará posteriormente como 1 fm). Los valores de las componentes P_x, P_y, P_z están cuantizadas de forma que $P_x = n_x 2\pi\hbar/L$. El número de estados tal que el módulo de su momento es inferior a P viene dado por los posibles valores enteros de n_x, n_y, n_z tales que:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \leq \left(\frac{PL}{\hbar 2\pi} \right)^2$$

lo cual lleva, a partir del volumen de la esfera, a:

$$N(P) = \frac{4\pi(Pc)^3 L^3}{3(2\pi\hbar c)^3}$$

En general, Pc es una función de E . Si se deriva $N(P)$, se obtiene

$$\rho(E) = \frac{dN(P)}{dE} = \frac{4\pi\Omega(Pc)^2 dPc}{(2\pi\hbar c)^3 dE}$$

La expresión concreta depende de la relación entre Pc y E . En el caso general de que B y C sean partículas relativistas, la conservación del cuadrivector energía-momento lleva a:

$$E = M(A)c^2 = \sqrt{(M(B)c^2)^2 + (Pc)^2} + \sqrt{(M(C)c^2)^2 + (Pc)^2}$$

Decaimiento en dos partículas no relativistas

Supongamos que la energía cinética E_c es considerablemente menor que las masas en reposo de B y C, con lo que ambas se moverán de forma no relativista. Entonces $E_c = (Pc)^2/(2\mu c^2)$, donde μ es la masa reducida de B y C, y

$$\rho(E) = 2\pi\Omega E_c^{1/2} (2\mu c^2)^{3/2} / (2\pi\hbar c)^3$$

Decaimiento en una partícula relativista y una partícula pesada

Consideremos que E_c y $M(C)c^2$ son mucho más pequeñas que $M(B)c^2$. Este es el caso cuando un núcleo emite un fotón. En ese caso, la partícula C se lleva prácticamente toda la energía cinética, y se cumple que

$$E = M(B)c^2 + \sqrt{(M(C)c^2)^2 + (Pc)^2}$$

de donde puede obtenerse la expresión de la densidad de estados.

Cuando la partícula C tiene masa nula o mucho menor que E_c (límite ultrarrelativista), se tiene que $E - M(B)c^2 = Pc$ y

$$\rho(E) = \frac{4\pi(M(A)c^2 - M(B)c^2)^2}{(2\pi\hbar c)^3}.$$

Decaimiento en dos partículas ligeras y una partícula pesada. Caso general

Consideramos el proceso en el que un núcleo atómico, o cualquier otra partícula pesada A, emite dos partículas de masa pequeña C y D, dejando una partícula pesada residual B, de masa parecida a la inicial. En ese caso, el núcleo residual se lleva una parte muy pequeña de la energía cinética disponible. La energía se distribuye entre los fragmentos ligeros, y el núcleo residual se lleva el momento necesario para compensar el de las otras dos partículas. En este caso, los momentos de las partículas C y D son diferentes en general, pero la suma de sus energías debe venir dada por $E_T = E_C + E_D = M(A)c^2 - M(B)c^2$. El momento P_C de la partícula C está relacionado con su energía por

$$E_C^2 = (M(C)c^2)^2 + (P_C c)^2$$

y la densidad de estados de esta partícula viene dada por:

$$\rho_C(E_C) = \frac{4\pi\Omega E_C \sqrt{E_C^2 - (M(C)c^2)^2}}{(2\pi\hbar c)^3}$$

Las mismas expresiones se obtienen para la partícula B. Para calcular la densidad de estados finales en los que se cumple $E_T = E_C + E_D$, basta con integrar

$$\rho(E_T) = \int_{M(C)c^2 + M(D)c^2}^{E_T} dE_C \rho_C(E_C) \rho_D(E_T - E_C)$$

En el límite en que E_T sea muy superior a $M(C)c^2$ y $M(D)c^2$, pueden utilizarse las expresiones untrrelativistas para ρ_C y ρ_D y se tiene:

$$\rho(E_T) = \frac{(4\pi\Omega)^2 E_T^5}{30(2\pi\hbar c)^6}$$

2.2.2 Estimación de las probabilidades de emisión

Interacción fuerte

Consideremos la emisión de un nucleón por un núcleo. Supongamos que el núcleo inicial tiene la energía suficiente para que el nucleón salga con 10 MeV. Entonces, utilizando la expresión no relativista, se tiene $\rho(E) = 0.84 \cdot 10^{-3} \text{MeV}^{-1}$. Utilizando la estimación de la interacción fuerte, se tiene $W_{i,f} \simeq 8 \cdot 10^{22} \text{s}^{-1}$, $\Gamma \simeq 52.8 \text{MeV}$, $\tau \simeq 0.12 \cdot 10^{-22} \text{s}$. Vemos, por tanto, que los sistemas que decaen por la interacción fuerte tienen vidas muy cortas.

Interacción electromagnética

Consideremos la emisión de un fotón por un núcleo, considerando también el caso en que la energía cinética disponible es de 10 MeV. En ese caso, usando la expresión de la emisión de una partícula ultrarrelativista, se tiene $\rho(E) = 0.66 \cdot 10^{-6} \text{MeV}^{-1}$. Usando la estimación de la interacción electromagnética, se tiene $W_{i,f} \simeq 6 \cdot 10^{15} \text{s}^{-1}$, $\Gamma \simeq 4 \cdot 10^{-6} \text{MeV}$, $\tau \simeq 1.6 \cdot 10^{-16} \text{s}$. Los sistemas que decaen por interacción electromagnética tienen vidas más largas que los que decaen por interacción fuerte, debido a que la interacción es más débil, pero también a que la densidad de estados suele ser menor, al producirse partículas relativistas (fotones).

Interacción débil

Consideremos la emisión de un electrón y un neutrino por un núcleo, considerando también el caso en que la energía cinética disponible es de 10 MeV. En ese caso, usando la expresión de la emisión de dos partículas ligeras y una pesada, en el límite ultrarrelativista, se tiene $\rho(E) = 1.46 \cdot 10^{-13} \text{MeV}^{-1}$. Usando la estimación de la interacción débil, se tiene $W_{i,f} \simeq 14 \text{s}^{-1}$, $\Gamma \simeq 9 \cdot 10^{-21} \text{MeV}$, $\tau \simeq 0.07 \text{s}$. Los sistemas que decaen por interacción electromagnética tienen vidas muy largas, debido a que la interacción es muy débil, pero también a que la densidad de estados es mucho menor, al emitirse dos partículas ligeras.

2.2.3 Teoría de Fermi de la interacción débil

La teoría de Fermi se introdujo para explicar el espectro de emisión de electrones en el decaimiento beta. La teoría parte de la regla de oro de Fermi. Para evaluar el elemento de matriz $\langle i|H_w|f \rangle$, se considera que el núcleo inicial, con una función de onda Ψ_i , describe Z protones y N neutrones. El núcleo final, con una función de onda Ψ_f , describe $Z+1$ protones y $N-1$ neutrones. El electrón y el neutrino vienen descritos por ondas planas, normalizadas en el volumen Ω . Sea \vec{r}_N la coordenada del neutron que se convierte en protón, y \vec{r}_L la coordenada donde se producen el electrón y el neutrino. Sea ξ la variable por la que denotamos el resto de las coordenadas relevantes. Entonces,

$$\langle i|H_w|f \rangle = \int d\xi d\vec{r}_N d\vec{r}_L \Psi_i(\xi, \vec{r}_N)^* H_w(\vec{r}_N, \vec{r}_L) \Psi_f(\xi, \vec{r}_N) \frac{\exp(i\vec{k}_e \vec{r}_L)}{\sqrt{\Omega}} \frac{\exp(i\vec{k}_\nu \vec{r}_L)}{\sqrt{\Omega}}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la interacción débil, se tiene

$$\langle i|H_w|f \rangle = \frac{G_F}{\Omega} \int d\xi d\vec{r}_N \Psi_i(\xi, \vec{r}_N)^* \tau^- \Psi_f(\xi, \vec{r}_N) \exp(i\vec{k} \vec{r}_N)$$

donde $\vec{k} = \vec{k}_e + \vec{k}_\nu$. Para energías no muy altas, $kr_N \ll 1$, y puede expresarse $\langle i|H_w|f \rangle = G_F M_{i,f} / \Omega$, donde

$$M_{i,f} = \int d\xi d\vec{r}_N \Psi_i(\xi, \vec{r}_N)^* \tau^- \Psi_f(\xi, \vec{r}_N)$$

depende sólo de la estructura de los núcleos.

Utilizando la expresión de la densidad de estados, se tiene, para la probabilidad total de emisión beta,

$$W_{i,f} = \frac{2\pi (4\pi G_F)^2}{\hbar (2\pi\hbar c)^6} |M_{i,f}|^2 \int_{m_e c^2}^{E_T} dE_e \sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2} E_e (E_T - E_e)^2.$$

Si queremos obtener la probabilidad de emisión de un electrón con energía entre E_e y $E_e + dE_e$, tenemos

$$dW_{i,f}/dE_e = \frac{2\pi (4\pi G_F)^2}{\hbar (2\pi\hbar c)^6} |M_{i,f}|^2 \sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2} E_e (E_T - E_e)^2.$$

que da la forma del espectro beta. Esta forma, no obstante, se ve modificada debido a la carga eléctrica del núcleo final, que interacciona con el electrón.

2.3 Secciones eficaces

Describen procesos en los que inicialmente hay dos partículas que colisionan, dando lugar a otras partículas, o bien a las mismas partículas incidentes moviéndose en una dirección diferente. Si consideramos que inicialmente hay un haz de partículas incidentes con velocidad v que colisionan con un blanco de partículas en reposo, la sección eficaz se define como

$$\sigma = N_c / (\Phi_i N_b)$$

donde N_c es el número de colisiones por unidad de tiempo, Φ_i es el número de partículas incidentes por unidad de tiempo y unidad de area y N_b es el número de partículas en el blanco. A efectos de evaluar esta expresión, vamos a considerar que el volumen del blanco V se divide en un número de celdillas de volumen Ω , tales que en cada volumen de interacción Ω hay una probabilidad p_i de que haya una partícula incidente y una probabilidad p_b de que haya una partícula del blanco. Entonces, $\Phi_i = p_i v / \Omega$, $N_b = p_b V / \Omega$, y $N_c = p_i p_b V / \Omega W_{i,f}$. Por tanto, se tiene la relación $\sigma = W_{i,f} \Omega / v$, que puede expresarse, usando la regla de oro de Fermi, como

$$\sigma = \frac{2\pi\Omega}{\hbar v} | \langle i | H | f \rangle |^2 \rho(E)$$

donde $|i\rangle = \psi_i \psi_b \exp(i\vec{k}\vec{r}) / \sqrt{\Omega}$. Notese que la dependencia explícita en Ω se cancela.

Para el caso de la interacción fuerte, por ejemplo, en una colisión protón-neutrón a 10 MeV, se tiene $\sigma \simeq 2 fm^2 = 0.02 barn$. Para la interacción electromagnética, por ejemplo, en una colisión electrón-protón a 10 MeV, esta estimación daría $\sigma \simeq 2 \cdot 10^{-8} fm^2$, aunque se esta ignorando el largo alcance de la interacción culombiana, por lo cual este valor es muy inferior al real. Para la interacción débil, por ejemplo en un proceso neutrino-neutrón para dar electrón y protón, con 10 MeV, se obtiene $\sigma \simeq 2 \cdot 10^{-16} fm^2$.

La sección eficaz puede relacionarse con el recorrido libre medio, por la expresión $\lambda = 1/n\sigma$, donde n es el número de núcleos por unidad de volumen, que es, para la materia sólida normal, $n \simeq 10^{-15} fm^{-3}$. Se obtiene, para la interacción fuerte, $\lambda_f \simeq 1m$, que corresponde al recorrido libre medio de un neutrón. Sin embargo, para la interacción débil, se tiene $\lambda_w \simeq 10^{14}m$, que es mucho mayor que el radio de la tierra $\simeq 10^7m$. La estimación del recorrido libre medio para la interacción electromagnética no es realista ya que, además de ignorar el largo alcance de la interacción, no consideraría el efecto de la interacción con los electrones.

2.4 Problemas

1) Demostrar que, para que exista un estado ligado protón-neutrón con un potencial de interacción de tipo pozo cuadrado,

$$V(r) = -V_0, r < R \quad ; \quad V(r) = 0, r > R$$

siendo μ la masa reducida protón-neutrón, debe cumplirse que

$$V_0 R^2 \geq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu}.$$

Nota: La función de onda radial $\phi_l(r)$ puede escribirse como $u_l(r)/r$, donde $u_l(r)$ debe satisfacer la ecuación:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right) u_l(r) = -B u_l(r).$$

Considerar el caso $l = 0$ y $B \ll V_0$.

2) Demostrar que la densidad de estados correspondientes a la emisión de una partícula relativista de masa m con una energía total E en un volumen V viene dada por

$$\rho(E) = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar c)^3} E(E^2 - m^2 c^4)^{1/2}$$

Obtener como casos límites la expresión ultrarrelativista $E \gg mc^2$ y la no relativista $E_c = E - mc^2 \ll mc^2$.

3) Obtener la densidad de estados para la emisión de dos partículas relativistas a partir del decaimiento de una partícula de masa $M(A)$ en otras dos de masas $M(B)$ y $M(C)$

4) Obtener la densidad de estados correspondiente al decaimiento del K^+ en a) $\pi^+ + \pi^0$, b) $\mu^+ + \nu$.

Teniendo en cuenta que la vida media del K^+ es $1.2386 \cdot 10^{-8} s$, y que el proceso a) ocurre en el 21.16 %, y el b) en el 63.51 % de los casos, obtener las probabilidades de decaimiento de los dos procesos por unidad de tiempo.

Obtener, a partir de la regla de oro de Fermi, los elementos de matriz de la interacción que generan estos decaimientos. Inferir qué interacción (fuerte, electromagnética o débil) es responsable del decaimiento.

Chapter 3

Propiedades de las partículas elementales

3.1 Introducción

La descripción relativista de las interacciones implica que cada interacción lleva asociada el intercambio de una partícula, que debe ser un bosón. En el caso de la interacción electromagnética, la partícula intercambiada es el fotón. En general, el alcance de la interacción está asociada con la masa de la partícula intercambiada.

Puede demostrarse que, si una interacción entre partículas de masa M , está generada por el intercambio de una partícula de masa $m \ll M$, la interacción puede describirse en el límite no relativista como un potencial de la forma $V(r) = V_0 \exp(r/\lambda)/(r/\lambda)$, donde $\lambda = \hbar/mc$. Esta expresión, que se demuestra estrictamente en Teoría Cuántica de Campos, puede interpretarse de la forma siguiente. Para crear una partícula de masa m , se necesita una energía mc^2 . De acuerdo con el principio de indeterminación, esta energía puede crearse durante un tiempo suficientemente corto, $\tau = \hbar/(mc^2)$, y durante este tiempo, la partícula puede viajar una distancia dada por $\lambda = \tau c = \hbar/(mc)$, que es el alcance de la interacción.

Como la interacción fuerte tiene un alcance $\lambda \simeq 1fm$, debe llevar asociada una partícula de masa $mc^2 \simeq 200MeV$. Este argumento, planteado por Yukawa, llevó a la búsqueda de partículas de masa intermedia entre el protón y el electrón. Esta búsqueda se llevó a cabo primeramente analizando los rayos cósmicos, ya que en aquellas fechas (1940-1950) no se habían desarrollado aceleradores de partículas con energía suficiente. El estudio de los rayos cósmicos se realizaba en las cámaras de niebla, en las que las partículas que componen los rayos cósmicos atraviesan un volumen con vapor de agua sobresaturado. Las partículas con carga eléctrica producían una cierta ionización del aire, lo cual provocaba la condensación del vapor de agua a lo largo de la trayectoria. Situando la cámara de niebla en campos eléctricos y magnéticos, y estudiando la curvatura de las trayectorias, podía conocerse la carga eléctrica, la energía y la masa de las partículas. Por otro lado, muchas de las partículas así detectadas eran inestables, y se descomponen en otras partículas. Estudiando la longitud de las trazas que dejaban las partículas en la cámara de niebla, podía deducirse su vida media.

La primera partícula que se detectó de esta forma fué el muón μ , cuya masa (105.6 MeV) podía ser compatible con la de la partícula predicha por Yukawa. No obstante, se encontró que la forma en la que interactuaba con las partículas de la cámara de niebla

indicaba que no interactuaba mediante la interacción fuerte. Esto es incompatible con que fuera la partícula de Yukawa. El muón tiene carga eléctrica negativa y se comportaba a todos los efectos como un electrón de masa más grande. Por otro lado, el muón es inestable, y se descompone en un tiempo de $2.2 \cdot 10^{-6}$ s en un electrón y dos partículas indetectables (neutrinos). El tiempo de vida del muón sugería que su decaimiento se produce por la interacción débil.

Posteriormente, se descubrió el pión, que aparecía con carga eléctrica positiva π^+ , negativa π^- o neutra π^0 . La masa del pión es de 139.6 MeV para π^+ y π^- , y de 135.0 MeV para π^0 . El pión sí interactuaba fuertemente con protones y neutrones, por lo que correspondía a la partícula de Yukawa. La vida de π^+ y π^- es de $2.6 \cdot 10^{-8}$ s, descomponiéndose principalmente en un muón (o anti-muón) y un neutrino, mediante la interacción débil. El π^0 se descompone en dos fotones en un tiempo de $8.4 \cdot 10^{-17}$ s, por la interacción electromagnética.

Más adelante se encontraron los kaones K^+ , K^- , K^0 , \bar{K}^0 , cuya masa es de 493.7 MeV para K^+ , K^- , y de 497.7 para K^0 , \bar{K}^0 . K^+ y K^- se descomponen principalmente en muón y neutrino, o en dos piones, con un tiempo de vida de $1.2 \cdot 10^{-8}$ s, mientras que los kaones neutros decaen en dos o tres piones, con semividas de $0.89 \cdot 10^{-10}$ s y $5.2 \cdot 10^{-8}$ s. Estos decaimientos ocurren por la interacción débil. Nótese que resultaba paradójico que los kaones, que sienten la interacción fuerte, tal como se deduce de sus secciones eficaces, decaen en piones (que también sienten la interacción fuerte) mediante la interacción débil. Por ello, a los kaones se les consideró partículas “extrañas”.

Con masas superiores a la del protón, se encontraron partículas, llamadas hiperones. Entre estas partículas está el Λ , de masa 1115.7 MeV y vida $2.6 \cdot 10^{-10}$ s, que decae principalmente en nucleón (proton o neutrón) y pión, por interacción débil. Esta es también una partícula “extraña”. El Σ^+ , de masa 1189.4 MeV y vida $2.6 \cdot 10^{-10}$ s, que decae principalmente en nucleón y pión, por interacción débil. El Σ^- , de masa 1197.4 MeV y vida $1.5 \cdot 10^{-10}$ s, que decae principalmente en nucleón y pión, por interacción débil. El Σ^0 , de masa 1192.6 MeV y vida $7.4 \cdot 10^{-20}$ s, decae en Λ y fotón por interacción electromagnética. Las “cascadas” Ξ^0 , de masa 1314.9 MeV y vida $2.90 \cdot 10^{-10}$ s y Ξ^- , de masa 1321.3 MeV y vida $1.60 \cdot 10^{-10}$ s, decaen en Λ y pión, por interacción débil.

Estas, junto con el protón, neutrón, electrón y neutrino, y sus antipartículas, eran las partículas conocidas en 1956. Posteriormente, con el advenimiento de los aceleradores, se descubrieron otras muchas partículas, por lo cual se vio la necesidad de clasificarlas.

3.2 Leptones

Se caracterizan porque no sienten la interacción fuerte. El electrón, el muón y el tau tienen carga eléctrica negativa. Los neutrinos tienen carga nula. Todos tienen espín 1/2, y son, por tanto, fermiones. Para cada partícula existe su antipartícula.

El momento magnético, en unidades de $e\hbar/2m$, es 1 en la teoría de Dirac para una partícula elemental con espín 1/2 y carga e . La desviación con respecto a 1 del valor experimental se explica, con todas sus cifras significativas, teniendo en cuenta las correcciones radiativas que aparecen en la electrodinámica cuántica. Por tanto, los leptones se consideran partículas elementales.

Los neutrinos no sienten la interacción electromagnética, porque tanto su carga como su momento magnético es cero. Solamente sienten la interacción débil. Los neutrinos tienen masa nula (ver los límites en la tabla). Por tanto, se mueven a la velocidad

de la luz. En la teoría de Dirac, se describen por espinores de dos componentes, que corresponden a tener una helicidad (proyección del espín en la dirección del movimiento) bien definida. De hecho, los neutrinos que se observan en la naturaleza tienen helicidad negativa ($s = \vec{J} \cdot \hat{p} = -1/2$), mientras que los anti-neutrinos tienen helicidad positiva. La helicidad es invariante frente a transformaciones de Lorentz solamente para partículas que se mueven a la velocidad de la luz. Si los neutrinos tuvieran masa no nula, se moverían a velocidades inferiores a la de la luz, con lo cual la helicidad dependería del sistema de referencia.

Los neutrinos, al tener masa nula, son necesariamente estables. Por un lado, no hay una partícula más ligera a la que puedan decaer, y por otro lado, aunque su tiempo propio fuera finito, como se observan desde un sistema con respecto al cual se mueven a la velocidad de la luz, la dilatación del tiempo de Lorentz haría que ese tiempo apareciera como infinito. Si se encontrara una masa no nula para los neutrinos, quizás podrían observarse transiciones de un tipo de neutrino a otro.

El electrón es la partícula más ligera con carga eléctrica. La conservación de la carga eléctrica exige que el electrón sea estable.

El muón decae por interacción débil en $e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Se sabe que se emiten dos neutrinos porque el electrón que aparece tiene una distribución de energías consistente con la teoría de Fermi. El proceso $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ no se observa experimentalmente (su probabilidad es menor que $4.9 \cdot 10^{-11}$). Si este proceso fuera el más importante, nos llevaría a considerar que el muón es un estado excitado del electrón. Este no es el caso. Por contra, el valor del momento magnético del muón nos lleva a considerar que el muón es una partícula elemental.

El tau, al tener una masa relativamente grande, puede decaer, por interacción débil, en muchas combinaciones de partículas, aunque siempre se produce un ν_τ . Las formas más probables de decaimiento son: $\tau \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$ (17.4%), $\tau \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$ (17.6%), $\tau \rightarrow \pi^- + \nu_\tau$ (10.1%), $\tau \rightarrow \rho^- + \nu_\tau$ (21.8%).

En los procesos de interacción débil, cuando desaparece un electrón, un muón o un tau, aparece el neutrino correspondiente. Por otro lado, también ocurren procesos (como el decaimiento beta) en los que se crea un electrón (muón o tau) y el anti-neutrino correspondiente. Ello lleva a introducir unos números cuánticos, los números leptónicos, que se conservan en la interacción débil. Estos son:

- Número leptónico electrónico (L_e): Vale 1 para e^- y ν_e , -1 para e^+ y $\bar{\nu}_e$, y 0 para el resto de partículas.
- Número leptónico muónico (L_μ): Vale 1 para μ^- y ν_μ , -1 para μ^+ y $\bar{\nu}_\mu$, y 0 para el resto de partículas.
- Número leptónico tauónico (L_τ): Vale 1 para τ^- y ν_τ , -1 para τ^+ y $\bar{\nu}_\tau$, y 0 para el resto de partículas.

La interacción electromagnética no afecta a los neutrinos, pero puede aniquilar o producir parejas leptón-antileptón, con lo que conserva los números leptónicos.

La interacción fuerte no actúa sobre los leptones, por lo que conserva trivialmente los números leptónicos.

Hasta ahora no hay evidencias de la violación de los números leptónicos, lo cual está relacionado con la masa nula de los neutrinos. Si se encontrara que los neutrinos tienen

masa no nula, podrían darse procesos, tanto más improbables cuanto menor fuera la masa de los neutrinos, de violación del número leptónico.

Leptón (Julio 2000)	masa(MeV)	$\mu(e\hbar/2m)$	$\tau(s)$
e	0.510998902(21)	1.001159652187(4)	Estable
μ	105.658357(5)	1.0011659160(6)	$2.19703 \cdot 10^{-6}$
τ	1777.03(28)	1.003(55)	$2.906 \cdot 10^{-13}$
ν_e	0 ($< 3 \cdot 10^{-6}$)	0 ($< 1.8 \cdot 10^{-10}$)	Estable
ν_μ	0 (< 0.19)	0 ($< 1.5 \cdot 10^{-7}$)	Estable
ν_τ	0 (< 18.2)	0 ($< 1.8 \cdot 10^{-3}$)	Estable

3.3 Hadrones

Sienten la interacción fuerte. Pueden dividirse en mesones (bosones, con espín entero), y bariones (fermiones, con espín semi-entero). Para describirlos se utilizan los números cuánticos siguientes:

3.3.1 Número bariónico

Se introduce para justificar el hecho de que el protón sea estable, y que otras partículas (neutrón, Λ , Σ , ..) decaen al protón. Se asigna $B=1$ al protón y a los hadrones que decaen en él, $B=-1$ a sus antipartículas, y $B=0$ a los hadrones que no decaen al protón. Empíricamente, se encuentra que los bariones tienen $B=1$, sus antipartículas (anti-bariones) tienen $B=-1$, y los mesones tienen todos $B=0$.

Hasta ahora, no hay evidencias de que se viole la conservación del número bariónico. La vida media del protón es superior a 10^{31} años. Si embargo, las teorías de gran unificación predicen que el protón tiene una vida finita, aunque muy larga.

3.3.2 Extrañeza

Se introduce para explicar el hecho de que algunos hadrones (K , Λ , Σ , ...), tengan vidas relativamente largas, lo cual implica que no decaen a otros hadrones más ligeros (p , π) por la interacción fuerte o la electromagnética, sino por la débil. Por otro lado, los experimentos de la cámara de niebla indicaban que estas partículas se producen con secciones eficaces consistentes con la interacción fuerte. Esto era una aparente paradoja, ya que estas partículas “extrañas” sentían la interacción fuerte cuando eran producidas, pero no parecían sentirla cuando decaían. La solución de la paradoja surgió de la observación de que las partículas extrañas aparecen por parejas.

Se introdujo un número cuántico S , que debía ser conservado por la interacción fuerte y electromagnética, pero podía ser violado por la interacción débil. S vale cero para los hadrones “normales” (p , n , π), y se le asignó el valor $S=1$ para los kaones K^0 y K^+ . Debido a la conservación de S por la interacción fuerte, en los procesos de colisión entre hadrones normales que produjeran K^0 o K^+ , la otra partícula extraña debe tener $S=-1$. Así se asignó $S=-1$ para \bar{K}^0 , K^- , Λ , Σ^+ , Σ^- , Σ^0 . Las cascadas Ξ^0 , Ξ^- tienen $S=-2$. Las antipartículas tienen extrañeza opuesta a las partículas, para que puedan aniquilarse con ellas sin violación de S . Cuando un hadrón con extrañeza S decae, si existen otros hadrones más ligeros a los que pueda decaer conservando S (además de la carga y el número bariónico), entonces el decaimiento será rápido, pues ocurre por interacción fuerte

o electromagnética (p. ej. $\Sigma_0 \rightarrow \Lambda + \gamma$). Si éste no es el caso, el decaimiento ocurrirá por la interacción débil, que puede cambiar la extrañeza en una unidad (en primer orden).

Formalmente, el número cuántico S puede considerarse como el autovalor de un operador \mathbf{S} , que conmuta con el hamiltoniano fuerte $[H_f, \mathbf{S}] = 0$ y electromagnético $[H_{em}, \mathbf{S}] = 0$. No obstante, el hamiltoniano débil no conmuta con \mathbf{S} : $[H_d, \mathbf{S}] \neq 0$. Los hadrones son autoestados de \mathbf{S} correspondientes a un autovalor S . Como el operador \mathbf{S} es aditivo, un sistema de hadrones es un autoestado de \mathbf{S} cuyo autovalor es la suma de los valores de S de los hadrones. Por ello, el hamiltoniano fuerte y el electromagnético sólo conectan estados (sistemas de partículas) con la misma extrañeza.

3.3.3 Isospín.

Se introduce a partir del hecho de que los hadrones aparecen en grupos de partículas, llamados multipletes, con masa muy parecida, y con propiedades muy similares (mismo espín, paridad, número bariónico, extrañeza), excepto que tienen carga eléctrica que varía de uno en uno. Por ejemplo, están el protón y el neutrón, los piones (π^+ , π^0 , π^-), etc.

Para describir este hecho, se definen tres operadores, \mathbf{I}_+ , \mathbf{I}_- , \mathbf{I}_3 , que cumplen las reglas de conmutación de un momento angular. \mathbf{I}_3 está relacionado con la carga eléctrica, y puede escribirse como $\mathbf{I}_3 = -Y/2 + Q/e$, donde Y es una constante para cada multiplete llamada hipercarga, que es dos veces la carga media del multiplete. Gell-Mann y Nishijima encontraron empíricamente que la hipercarga estaba relacionada con la extrañeza y el número bariónico a través de la relación $Y = B + S$.

Las partículas de un multiplete son autoestados de \mathbf{I}_3 . Así, para los nucleones, $Y=1$, $\mathbf{I}_3|p\rangle = 1/2|p\rangle$ y $\mathbf{I}_3|n\rangle = -1/2|n\rangle$. Para los piones, $Y=0$, $\mathbf{I}_3|\pi^+\rangle = +1|\pi^+\rangle$, $\mathbf{I}_3|\pi^0\rangle = 0|\pi^0\rangle$, $\mathbf{I}_3|\pi^-\rangle = -1|\pi^-\rangle$. \mathbf{I}_+ actuando sobre una partícula, la convierte en otra de carga superior perteneciente al multiplete: $\mathbf{I}_+|n\rangle = |p\rangle$, $\mathbf{I}_+|p\rangle = 0$. \mathbf{I}_- disminuye la carga de la partícula. Por analogía con el momento angular, todas las partículas del multiplete son autoestados del operador $\mathbf{I}^2 = 1/2(\mathbf{I}_+\mathbf{I}_- + \mathbf{I}_-\mathbf{I}_+) + \mathbf{I}_3^2$ correspondientes a un autovalor $I(I+1)$. I , que es el isospín del multiplete, está relacionado con el número de partículas en el multiplete, que es $2I+1$.

La introducción del isospín permite considerar que las partículas de un multiplete son, a todos los efectos, partículas idénticas, que, además de venir caracterizadas por su función de onda orbital y su función de onda de espín, tienen una función de onda de isospín. Así, el protón es un estado del nucleón tal que su función de onda de isospín es autoestado del operador \mathbf{I}_3 correspondiente al autovalor $I_3 = 1/2$, y el neutrón es un estado del nucleón cuyo autovalor es $I_3 = -1/2$.

Como las partículas de un multiplete tienen masas parecidas, se considera que, del hamiltoniano total que describe las partículas, $H = H_f + H_{em} + H_d$, $[H_f, \mathbf{I}] = 0$, indicando que la interacción fuerte conmuta con todas las componentes del isospín. Por otro lado, las diferencias de masas entre las partículas de un multiplete son del orden del MeV, lo cual indica que la interacción electromagnética no conmuta con los operadores \mathbf{I}_\pm . Sin embargo, sí conmuta con \mathbf{I}_3 , ya que conserva la carga eléctrica, el número bariónico y la extrañeza. La interacción débil no conserva ninguna de las componentes del isospín.

En general, si sólo existiera la interacción fuerte, los hadrones de un mismo multiplete tendrían exactamente la misma masa, y corresponderían a autoestados degenerados del hamiltoniano. La interacción electromagnética rompe esta degeneración, desdoblado las masas del multiplete en función del valor de I_3 . La interacción débil tiene un efecto

mínimo sobre las masas, siendo responsable de los decaimientos.

3.3.4 Isospín de sistemas de partículas

El isospín total de dos partículas A y B se obtiene de la forma siguiente: la partícula A tiene unos valores del isospín y su tercera componente dados por I_A, I_{3A} . Por tanto, el ket que caracteriza el estado interno de la partícula A puede escribirse como $|A\rangle = |\alpha I_A I_{3A}\rangle$, donde α caracteriza los números cuánticos necesarios para caracterizar el multiplete de partículas al que pertenece A, y I_{3A} especifica qué partícula es A dentro de su multiplete, determinando su carga eléctrica. Análogamente, $|B\rangle = |\beta I_B I_{3B}\rangle$. El sistema AB puede describirse como el producto de una función de onda que describa el movimiento de A y B, por una función de onda que describa sus espines, por una función de onda interna, Esta última puede escribirse como

$$|A, B\rangle = |\alpha I_A I_{3A}, \beta I_B I_{3B}\rangle = \sum_{I_T, I_{3T}} \langle I_T, I_{3T} | I_A I_{3A}, I_B I_{3B} \rangle |\alpha I_A, \beta I_B; I_T, I_{3T}\rangle$$

Por tanto, el sistema AB viene descrito por una combinación de valores de I_T que van de $|I_A - I_B|$ a $I_A + I_B$. Esta combinación viene determinada por los coeficientes de Clebsh-Gordan.

Si las partículas pertenecen al mismo multiplete de isospín, entonces los valores del isospín total quedan restringidos por la exigencia de que la función de onda debe ser simétrica frente al intercambio de todas las variables de las partículas, en el caso de bosones, y antisimétrica en el caso de fermiones.

Sea un sistema de dos partículas A y B, pertenecientes a un multiplete α , con espín S e isospín I . Las partículas tienen un momento angular orbital relativo L , y un espín total S_T , y consideramos la componente de su estado en la que su isospín total es I_T . Frente al intercambio de las partículas, la función de onda orbital se modifica en un factor $(-1)^L$. La función de onda de espín, por las propiedades de los coeficientes de Clebsh-Gordan, se modifica en un factor $(-1)^{(S_T - 2S)}$. La función de onda de isospín, análogamente, se modifica en un factor $(-1)^{(I_T - 2I)}$. El producto de todos estos factores debe ser $+1$ para bosones y -1 para fermiones. Teniendo en cuenta que S es semientero para fermiones y entero para bosones, resulta que, en ambos casos, debe cumplirse que $L + S_T + I_T - 2I$ sea par.

3.4 Partículas estables y resonancias.

En física de partículas se distingue entre “partículas estables” y “resonancias”. Las primeras son estables o decaen por interacción débil o electromagnética. Por ello, tienen vidas medias relativamente largas que permiten su observación directa. Las segundas decaen por interacción fuerte. Tienen vidas muy cortas, y aparecen como resonancias (máximos en la sección eficaz) en las colisiones de las partículas en las que decaen, a energías correspondientes a la masa de la partícula descrita por la resonancia.

Partículas estables (Julio 2000).

Mesones	I	S	J^π	I_3	masa(MeV)	vida (s)	Deca.
π^\pm	1	0	0^-	± 1	139.57018	$2.6033 \cdot 10^{-8}$	$\mu + \nu_\mu$
π^0	1	0	0^-	0	134.9766	$8.4 \cdot 10^{-17}$	2γ
η	0	0	0^-	0	547.30	$6.3 \cdot 10^{-19}$	2γ
$K^+(K^-)$	1/2	1(-1)	0^-	1/2(-1/2)	493.677	$1.2386 \cdot 10^{-8}$	$2\pi, \mu + \nu_\mu$
$K^0(\bar{K}^0)$	1/2	1(-1)	0^-	-1/2(1/2)	497.672	$0.8935 \cdot 10^{-10}$	2π
						$5.17 \cdot 10^{-8}$	3π

Bariones	I	S	J^π	I_3	masa(MeV)	vida (s)	Deca.
p	1/2	0	$1/2^+$	1/2	938.27200	∞	-
n	1/2	0	$1/2^+$	-1/2	939.56533	886.7	$p + e + \bar{\nu}_e$
Λ	0	-1	$1/2^+$	0	1115.683	$2.632 \cdot 10^{-10}$	$N + \pi$
Σ^+	1	-1	$1/2^+$	1	1189.37	$0.8018 \cdot 10^{-10}$	$N + \pi$
Σ^0	1	-1	$1/2^+$	0	1192.642	$7.4 \cdot 10^{-20}$	$\Lambda + \gamma$
Σ^-	1	-1	$1/2^+$	-1	1197.449	$1.479 \cdot 10^{-10}$	$N + \pi$
Ξ^0	1/2	-2	$1/2^+$	1/2	1314.83	$2.90 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda + \pi$
Ξ^-	1/2	-2	$1/2^+$	-1/2	1321.31	$1.639 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda + \pi$
Ω^-	0	-3	$3/2^+$	0	1672.45	$0.821 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda + K$

Resonancias (solamente algunas se muestran en la tabla):

Mesones	I	S	J^π	Masa(MeV)	Anchura(MeV)	Decaimiento
$\rho(770)$	1	0	1^-	769.3	150.2	2π
$\omega(783)$	0	0	1^-	782.57	8.44	3π
$\eta'(958)$	0	0	0^-	957.78	0.202	$\eta 2\pi$
$\phi(1020)$	0	0	1^-	1019.417	4.458	$K\bar{K}$
$K^*(892)^{pm}$	1/2	± 1	1^-	891.66	50.8	$K\pi$
$K^*(892)^0$	1/2	± 1	1^-	896.10	50.7	$K\pi$

Bariones	I	S	J^π	Masa(MeV)	Anchura (MeV)	Decaimiento
$\Delta(1242)$	3/2	0	$3/2^+$	1232	120	$N\pi$
$\Lambda^*(1405)$	0	-1	$1/2^-$	1406	50	$\Sigma\pi$
$\Sigma^*(1385)^+$	1	-1	$3/2^+$	1382.8	35.8	$\Lambda\pi$
$\Sigma^*(1385)^0$	1	-1	$3/2^+$	1383.7	36	$\Lambda\pi$
$\Sigma^*(1385)^-$	1	-1	$3/2^+$	1387.2	39.4	$\Lambda\pi$
$\Xi^*(1530)^0$	1/2	-2	$3/2^+$	1531.8	9.1	$\Xi\pi$
$\Xi^*(1530)^-$	1/2	-2	$3/2^+$	1535.0	9.9	$\Xi\pi$

3.5 Conservación de números cuánticos

En una reacción entre partículas, o en el decaimiento de una partícula, se debe conservar siempre la energía y el momento. Por ejemplo, un fotón aislado no puede crear un par e^-e^+ , o viceversa. También debe conservarse el momento angular total. Ello hace que en el decaimiento de un fermión, con espín semientero, deban aparecer un número impar de fermiones, mientras que en el decaimiento de un bosón deban aparecer un número par (incluido el cero) de fermiones. Estas leyes de conservación están asociadas a la invariancia del sistema frente a transformaciones de Lorentz.

También deben conservarse siempre la carga eléctrica Q , el número bariónico B , y los números leptónicos L_e, L_μ, L_τ . Estas leyes de conservación son leyes empíricas, y pudiera ser que se violaran, pero con una probabilidad muy pequeña, por debajo de los límites experimentales. La conservación de la carga eléctrica tiene una consideración especial, ya que está asociada a una simetría Gauge que genera la interacción electromagnética.

Los procesos que ocurren por interacción fuerte o electromagnética conservan la extrañeza. Ello hace que la suma de los valores de S de las partículas iniciales en una reacción debe ser igual a la de las partículas finales (los leptones y los fotones se toman con $S=0$). Los procesos débiles pueden cambiar (o no) la extrañeza. Se observa empíricamente que los procesos que ocurren en primer orden por la interacción débil cumplen que $\Delta S = \pm 1, 0$.

Los procesos que ocurren por interacción fuerte conservan el isospín. Eso quiere decir no sólo que conservan I_3 , sino que conservan el isospín total I .

Para que una partícula C pueda decaer en A y B conservando el isospín total, debe ocurrir que los isospines de A y B puedan acoplarse al de C , o sea, que $|I_A - I_B| \leq I_C \leq (I_A + I_B)$. Por otro lado, para que de la colisión de A y B puedan surgir las partículas C y D conservando el isospín total debe haber al menos un valor de I_T que pueda obtenerse acoplando tanto I_A e I_B , como I_C e I_D .

Los procesos que ocurren por interacción electromagnética conservan I_3 , pero no conservan I . En los procesos en primer orden en la interacción electromagnética, $\Delta I = \pm 1, 0$. En los procesos débiles, no se conserva I_3 ni I . No obstante, se encuentra que, en los procesos en primer orden en la interacción débil, si $\Delta S = \pm 1$, $\Delta I = \pm 1/2$, y si $\Delta S = 0$, $\Delta I = \pm 1, 0$.

3.5.1 Relación entre las probabilidades de decaimiento

La conservación del isospín permite relacionar las probabilidades de los procesos que ocurren por interacción fuerte entre partículas que pertenecen a multipletes determinados.

Si una resonancia C , descrita por $|C\rangle = |\gamma I_C I_{3C}\rangle$ decae en dos hadrones A y B por interacción fuerte, la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo puede escribirse como

$$P(C \rightarrow A + B) = |\langle C | H_f | AB \rangle|^2 \frac{2\pi}{\hbar} \rho_{AB}(E)$$

El elemento de matriz del hamiltoniano puede expresarse usando el desarrollo del estado $|AB\rangle$, de forma que:

$$\langle C | H_f | AB \rangle = \sum_{I_T, I_{3T}} \langle I_T, I_{3T} | I_A I_{3A}, I_B I_{3B} \rangle \langle \gamma I_C I_{3C} | H_f | \alpha I_A, \beta I_B; I_T, I_{3T} \rangle$$

La conservación del isospín implica que $I_C = I_T$, $I_{3C} = I_{3T}$. Por otro lado, como $[H_f, I_\pm] = 0$, los elementos de matriz deben ser independientes de I_3 . Por tanto, resulta

$$\langle C | H_f | AB \rangle = \langle I_C, I_{3C} | I_A I_{3A}, I_B I_{3B} \rangle \langle \gamma I_C || H_f || \alpha I_A, \beta I_B; I_T \rangle$$

La doble barra es una notación que se introduce para indicar que no es necesario especificar I_{3C} , porque el elemento de matriz es independiente de él. Por otro lado, la densidad de estados depende de la energía cinética de A y B , que, a su vez, depende de las masas de A , B y C , pues $E_c = m(C) - m(A) - m(B)$. Como las masas de las partículas del multiplete son muy parecidas, puede escribirse $\rho_{AB}(E) \simeq \rho_{\alpha\beta}(E)$, donde $\rho_{\alpha\beta}(E)$ es una densidad de

estados promedio para todas las partículas del multiplete. Por tanto, la probabilidad de decaimiento puede escribirse como:

$$P(C \rightarrow A + B) = | \langle I_C, I_{3C} | I_A I_{3A}, I_B I_{3B} \rangle |^2 | \langle \gamma I_C || H_f || \alpha I_A, \beta I_B; I_T \rangle |^2 \frac{2\pi}{\hbar} \rho_{\alpha\beta}(E)$$

Esta expresión indica que la probabilidad de decaimiento de las resonancias C de un multiplete γ en distintas partículas A de un multiplete α y B de β , es proporcional al coeficiente de Clebsh-Gordan al cuadrado.

3.5.2 Relación entre secciones eficaces

En un proceso de colisión que ocurre por la interacción fuerte, por el cual $A + B \rightarrow D + E$, la sección eficaz viene dada por

$$\sigma(A + B \rightarrow D + E) = \frac{2\pi\Omega}{\hbar v} | \langle AB | H | DE \rangle |^2 \rho_{DE}(E) \quad (3.1)$$

$\rho_{DE}(E)$ depende de la energía cinética final de D y E , en su sistema centro de masas, que viene dada por $E_c = E - m(D) - m(E)$. Sustituyendo $\rho_{DE}(E)$ por un promedio para las partículas del multiplete, la sección eficaz depende del cuadrado del elemento de matriz del hamiltoniano. Los estados $|AB\rangle$ y $|DE\rangle$ pueden desarrollarse en función de estados con isopín total I_T, I_{3T} . Los elementos de matriz del hamiltoniano son diagonales en I_T, I_{3T} , y por otro lado son independientes de I_{3T} . Por tanto, resulta

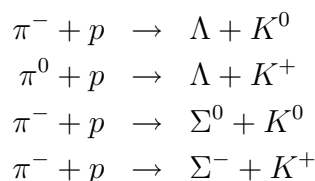
$$\begin{aligned} \langle AB | H_f | DE \rangle &= \sum_{I_T, I_{3T}} \langle I_T, I_{3T} | I_A I_{3A}, I_B I_{3B} \rangle \langle I_T, I_{3T} | I_D I_{3D}, I_E I_{3E} \rangle \\ &\quad \langle \alpha I_A, \beta I_B; I_T || H_f || \delta I_D, \epsilon I_E; I_T \rangle \end{aligned}$$

A partir del conocimiento de unos pocos elementos de matriz reducidos, correspondientes a los valores de I_T a los que pueden acoplarse tanto I_A e I_B como I_D e I_E , pueden obtenerse todas las secciones eficaces de las colisiones de partículas del multiplete α con las del β para dar partículas del δ y el ϵ .

Cuando la energía total en el sistema centro de masas está cercana a la masa de una resonancia C , el proceso ocurre de forma secuencial según $A + B \rightarrow C \rightarrow D + E$. En este caso, la contribución correspondiente a $I_T = I_C$ es dominante, y la sección eficaz aumenta considerablemente.

3.6 Problemas

1) Considerar las siguientes reacciones, que ocurren con secciones eficaces compatibles con la interacción fuerte:



$$\begin{aligned}
\pi^+ + p &\rightarrow \Sigma^+ + K^+ \\
\pi^- + p &\rightarrow \Xi^- + K^0 + K^+ \\
\pi^- + p &\rightarrow \Xi^0 + K^0 + K^0 \\
\pi^+ + p &\rightarrow \Xi^0 + K^+ + K^+ \\
\pi^- + p &\rightarrow n + K^+ + K^- \\
\pi^- + p &\rightarrow n + K^0 + \bar{K}^0
\end{aligned}$$

Partiendo de que, por convenio, se toma que $S(p) = S(n) = S(\pi) = 0$, y $S(K^+) = 1$, deducir los valores de la extrañeza de las otras partículas. Obtener la energía cinética mínima inicial en el sistema centro de masas para que pueda producirse la reacción en cada caso.

2) Considera las reacciones siguientes:

$$\begin{aligned}
\bar{p} + p &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\
p + K^- &\rightarrow \Sigma^+ + \pi^- + \pi^0 \\
p + K^- &\rightarrow n + K^+ + \pi^- \\
\bar{\nu}_\mu + p &\rightarrow \mu^+ + n \\
\bar{\nu}_e + p &\rightarrow e^+ + \Lambda \\
\tau^- &\rightarrow \nu_\tau + K^- \\
\pi^0 &\rightarrow \gamma + \gamma \\
e^+ + e^- &\rightarrow \pi^+ + \pi^-
\end{aligned}$$

Comprobar si se conservan los numeros cuánticos aditivos relevantes. Indicar si es posible la reacción, y qué interacción (fuerte, electromagnética o debil) la produce.

3) Obtener los estados de isospín de los pares de partículas siguientes: π^+p , π^+n , π^0p , π^0n , π^-p , π^-n . Comprobar que estos estados son ortogonales, y que forman una base de los estados $|(\pi N)II_3\rangle$.

4) Obtener la expresión de las secciones eficaces siguientes en terminos de los elementos de matriz reducidos relevantes. Deducir las expresiones que relacionan las secciones eficaces. Si la energía total en el sistema centro de masas es cercana a 1230 MeV (resonancia Δ), ¿como serían estas relaciones?

$$\begin{aligned}
a) \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p & b) \pi^+ + n &\rightarrow \pi^+ + n \\
c) \pi^+ + n &\rightarrow \pi^0 + p & d) \pi^0 + p &\rightarrow \pi^+ + n \\
e) \pi^0 + p &\rightarrow \pi^0 + p & f) \pi^0 + n &\rightarrow \pi^0 + n \\
g) \pi^0 + n &\rightarrow \pi^- + p & h) \pi^- + p &\rightarrow \pi^0 + n \\
i) \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p & j) \pi^- + n &\rightarrow \pi^- + n
\end{aligned}$$

5) Obtener la expresion de las secciones eficaces siguientes en función de los elementos de matriz reducidos, y la relación entre ellos.

$$a) \pi^0 + p \rightarrow \Lambda + K^+ \quad b) \pi^+ + n \rightarrow \Lambda + K^+$$

$$\begin{aligned}
c) \pi^0 + n &\rightarrow \Lambda + K^0 & d) \pi^- + p &\rightarrow \Lambda + K^0 \\
e) \pi^- + n &\rightarrow \Lambda + K^-
\end{aligned}$$

6) El principio de Pauli generalizado puede enunciarse diciendo que un sistema de nucleones (protones y neutrones) viene descrito por una función de onda que sea antisimétrica frente al intercambio de las variables orbitales, de espín y de isospín de dos nucleones cualesquiera. Partiendo de ello, deducir que el deuterón ($J^\pi = 1^+$) tiene $I=0$.

7) Obtener la función de onda de isospín de un sistema $\pi^+\pi^-$ con un momento angular relativo L . Hacer lo propio para un sistema $\pi^0\pi^0$ con momento angular L . ¿ Son posibles todos los valores de L ?

8) Considera un sistema de tres piones $\pi^+\pi^-\pi^0$ y $\pi^0\pi^0\pi^0$ con momento angular total interno 0. Obtener la función de onda de isospín. Nota: El momento angular total interno es la composición del momento angular relativo de dos piones (por ejemplo, $\pi^+\pi^-$) L_{12} , con el del tercero con respecto al centro de masas de los otros dos L_3 .

Chapter 4

Interacciones en una teoría cuántica de campos

En una teoría cuántica de campos, las partículas libres y sus interacciones se describen a partir de la densidad lagrangiana \mathcal{L} . Esta densidad es una función de los campos asociados a las partículas interactuantes $\phi(x), \psi(x), A_\mu(x)$, que a su vez son funciones de $x = (\vec{r}, ict)$, y de sus derivadas $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$. En segunda cuantización, los coeficientes del desarrollo de Fourier de los campos $\phi(x), \psi(x), A_\mu(x)$, corresponden a operadores que crean o aniquilan partículas de momento determinado. En concreto, $\phi(x)$ aniquila mesones de espín cero, o crea sus anti-partículas, y $\phi(x)^*$ hace lo contrario. $\psi(x)$ aniquila fermiones de espín 1/2, o crea sus anti-partículas, y $\bar{\psi}(x)^*$ hace lo contrario. $A_\mu(x)$ aniquila o crea fotones de espín uno. La forma del lagrangiano sin interacción, tomando $\hbar = c = 1$, es la siguiente:

Bosones de espín 0 (mesones).

El campo asociado a una partícula de espín cero $\phi(x)$ es una función escalar (invariante de Lorentz) de x . La densidad lagrangiana para estas partículas viene dada por:

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi(x)^* \partial_\mu \phi(x) - m^2 \phi(x)^* \phi(x)$$

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$\partial_\mu^2 \phi(x) - m^2 \phi(x) = 0$$

que corresponde a una partícula de masa m ,

$$(E^2 - p^2 - m^2)\phi(x) = 0.$$

Por otro lado, si buscamos soluciones estacionarias a la ecuación de Klein-Gordon, una solución regular en todo el espacio salvo en el origen es:

$$\phi(x) = C \exp(-rm)/r$$

Si se introducen explícitamente los factores \hbar y c , se tiene $\phi(x) = C\hbar c \exp(-r/(\hbar/mc))/r$, que corresponde al potencial de Yukawa.

El análisis dimensional de estas ecuaciones indica que $[x] = E^{-1}$, $[\partial_\mu] = E$, y $[\mathcal{L}] = E^4$. Por tanto, ϕ tiene dimensiones de E .

Fermiones de espín 1/2.

El campo asociado a una partícula de espín 1/2 $\psi(x)$ es un espinor de cuatro componentes. La densidad lagrangiana para estas partículas viene dada por:

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x)$$

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene la ecuación de Dirac

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0$$

El análisis dimensional indica que ψ tiene dimensiones de $E^{3/2}$.

Bosones de espín 1.

El campo asociado a una partícula de espín 1 $A_\mu(x)$ es un cuadrivector de cuatro componentes. La densidad lagrangiana para estas partículas viene dada por:

$$\mathcal{L} = -1/4(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))^2 - 1/2m^2(A_\mu(x))^2$$

El lagrangiano del campo electromagnético se obtiene poniendo $m=0$. En este caso, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtienen las ecuaciones de Maxwell, en ausencia de fuentes

$$\partial_\mu(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) = 0$$

El análisis dimensional indica que A_μ tiene dimensiones de E .

4.1 Interacción fuerte

Describe el acoplamiento de los bariones con los mesones, o bien de los mesones entre sí. La forma de la densidad lagrangiana de interacción para bariones de espín 1/2 con mesones de espín 0, requerida por la invariancia de Lorentz, viene dada por

$$\mathcal{L}^f = g(BM, C)\bar{\psi}_C(x)\phi_M(x)\psi_B(x)$$

donde $g(BM, C)$ es una constante de acoplo adimensional asociada al proceso en que se aniquila un barión B y un mesón M para crear un barión C.

Las constantes de los procesos de interacción fuerte son del orden de la unidad. La conservación de los números cuánticos aditivos hace que, si los números cuánticos de C (extrañeza, etc) no son iguales a los de B más los de M, $g(BM, C) = 0$. La conservación del isospín implica que las constantes de acoplo de todas las partículas B, M, C pertenecientes a multipletes β, μ, γ pueden expresarse en función de una única constante $g(\beta\mu, \gamma)$ como

$$g(BM, C) = g(\beta\mu, \gamma) \langle I_B I_{3B}, I_M I_{3M} | I_C I_{3C} \rangle$$

El efecto de la interacción fuerte se describe mediante el calculo de los diagramas de Feynmann relevantes. A efectos de estimar las secciones eficaces y las probabilidades de decaimiento, puede utilizarse la regla de oro de Fermi, teniendo en cuenta que el elemento de matriz del hamiltoniano pueden estimarse de forma grosera por las expresiones siguientes:

- Procesos en que intervienen dos bariones reales y un mesón real (un vértice):

$$\langle i|H|f \rangle \simeq \frac{g}{\sqrt{E_M}} \sqrt{\frac{(\hbar c)^3}{\Omega}}$$

- Procesos en que intervienen cuatro bariones reales y se propaga un mesón virtual (dos vértices):

$$\langle i|H|f \rangle \simeq \frac{g_1 g_2}{E_M^2 - p_M^2 c^2 - (m_M c^2 + i\Gamma_M/2)^2} \frac{(\hbar c)^3}{\Omega}$$

donde E_M y p_M son la energía y el momento del mesón virtual, que se obtienen usando la conservación de la energía y el momento en cada vértice. m_M es su masa, y Γ_M su anchura.

- Procesos en que intervienen dos bariones reales y dos mesones reales y se propaga un barión virtual (dos vértices):

$$\langle i|H|f \rangle \simeq \frac{g_1 g_2}{\sqrt{E_B^2 - p_B^2 c^2 - (m_B c^2 + i\Gamma_B/2)^2}} \frac{1}{\sqrt{E_{M1} E_{M2}}} \frac{(\hbar c)^3}{\Omega}$$

donde E_B y p_B son la energía y el momento del barión virtual, que se obtienen usando la conservación de la energía y el momento en cada vértice. m_B es su masa, y Γ_B su anchura.

Cuando las condiciones cinemáticas de la colisión son tales que para la partícula virtual que se propaga se cumple que $E^2 - p^2 c^2 \simeq c^4 m^2$, se produce un aumento muy importante en $\langle i|H|f \rangle$, que se traduce en un aumento en la sección eficaz. Esto permite estudiar las “resonancias”.

4.2 Interacción electromagnética

Describe el acoplamiento de corrientes generadas por campos fermiónicos o bosónicos con el campo electromagnético.

$$\mathcal{L}^{em} = e A_\mu(x) j_\mu(x)$$

La forma de la corriente $j_\mu(x)$ viene dado, para fermiones de carga e , por

$$j_\mu(x) = i \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

Para mesones de espín cero y carga e , viene dada por

$$j_\mu(x) = i \phi(x)^* \partial_\mu \phi(x)$$

La constante de acoplo e , en unidades naturales, vale $\sqrt{4\pi/137.0359895} = 0.3028$.

Para describir el proceso electromagnético $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$, se toma

$$j_\mu(x)(\Sigma^0, \Lambda) = i C(\Sigma, \Lambda) \bar{\psi}_\Lambda(x) \gamma_\mu \psi_{\Sigma^0}(x)$$

donde $C(\Sigma, \Lambda)$ es una constante de acoplamiento electromagnético que se determina fenomenológicamente. Las corrientes tienen dimensiones de E^3 .

El efecto de la interacción electromagnética se describe mediante el cálculo de los diagramas de Feynmann relevantes. A efectos de estimar las secciones eficaces y las probabilidades de decaimiento, puede utilizarse la regla de oro de Fermi, teniendo en cuenta que el elemento de matriz del hamiltoniano pueden estimarse por las expresiones siguientes, en las que E es la energía total en el sistema centro de masas:

- Procesos en que intervienen dos fermiones reales y un fotón real (un vértice):

$$\langle i|H|f \rangle \simeq \frac{eC(F_1, F_2)}{\sqrt{E_\gamma}} \sqrt{\frac{(\hbar c)^3}{\Omega}}$$

- Procesos en que intervienen cuatro fermiones reales y se propaga un fotón virtual (dos vértices):

$$\langle i|H|f \rangle \simeq \frac{e^2}{E_\gamma^2 - p_\gamma^2 c^2} \frac{(\hbar c)^3}{\Omega}$$

donde E_γ y p_γ son la energía y el momento del fotón virtual, que se obtienen usando la conservación de la energía y el momento en cada vértice.

- Procesos en que intervienen dos fermiones reales y dos fotones reales y se propaga un fermión virtual (dos vértices):

$$\langle i|H|f \rangle \simeq \frac{e^2}{\sqrt{E_F^2 - c^2 p_F^2 - (m_F c^2 + i\Gamma_F)^2}} \frac{1}{\sqrt{E_{\gamma 1} E_{\gamma 2}}} \frac{(\hbar c)^3}{\Omega}$$

donde E_F y p_F son la energía y el momento del fermión virtual, que se obtienen usando la conservación de la energía y el momento en cada vértice. m_F es su masa, y Γ_F su anchura.

4.3 Interacción débil

La primera teoría cuántica de campos de la interacción débil fué desarrollada por Fermi. Describe el acoplamiento entre corrientes de leptones o de hadrones. Podemos distinguir:

4.3.1 Procesos leptónicos.

Son los procesos en los que intervienen únicamente leptones, como el decaimiento de un muón en electrón y neutrinos. La densidad lagrangiana en este caso viene dada por:

$$\mathcal{L}^d = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\mu^{-el} j_\mu^{+mu}$$

donde

$$j_\mu^{-el} = i\bar{\psi}_{el}(x)(1 - \gamma_5)\gamma_\mu\psi_{n.el}(x)$$

crea un electrón y un anti-neutrino electrónico en este caso, por tanto crea una carga neta negativa, y

$$j_\mu^{+mu} = i\bar{\psi}_{n.mu}(x)(1 - \gamma_5)\gamma_\mu\psi_{mu}(x)$$

crea un neutrino muónico y aniquila un muón, por lo que crea una carga neta positiva. De esta forma, se construyen las corrientes $j_\mu^{\pm el, mu, tau}$. Las corrientes así construídas conservan los números leptónicos. La carga eléctrica se conserva ya que sólo se consideran productos de corrientes positivas y negativas. El operador γ_5 determina la quiralidad. Sus autoestados son +1, correspondiente a quiralidad positiva, y -1, correspondiente a quiralidad negativa. El factor $(1 - \gamma_5)$ hace que sólo los leptones con quiralidad negativa sientan la interacción débil. La quiralidad está relacionada con la helicidad cuando la

velocidad del fermión tiende a la de la luz. Así, fermiones con quiralidad negativa corresponden a helicidad $s = -1/2$, y antifermiones con quiralidad negativa corresponden a helicidad $s = +1/2$. Ello implica que sólo los neutrinos con helicidad negativa y los antineutrinos con helicidad positiva sientan la interacción débil y, por tanto, sólo ellos pueden producirse o detectarse en procesos débiles.

La constante $G_F/(\hbar c)^3$ vale $1.16639 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$, y es única para todos los procesos débiles.

4.3.2 Procesos semi-leptónicos.

Son procesos débiles en los que intervienen tanto hadrones como leptones. El ejemplo típico es el decaimiento beta del neutrón. Para describirlo, se utiliza una densidad lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}^d = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\mu^{-el} j_\mu^{+n \rightarrow p}$$

donde j_μ^{-el} viene dado por la expresión anterior, y

$$j_\mu^{+n \rightarrow p} = i\bar{\psi}_p(x)(g_V^{n \rightarrow p} + g_A^{n \rightarrow p} \gamma_5) \gamma_\mu \psi_n(x)$$

$g_V^{n \rightarrow p}$ y $g_A^{n \rightarrow p}$ son constantes fenomenológicas, llamadas constantes vector y axial, que toman los valores 0.983 y -1.245. Los procesos débiles que violan la extrañeza, como el decaimiento beta de la Λ , se describen de forma análoga, con otras constantes $g_V^{\Lambda \rightarrow p}$ y $g_A^{\Lambda \rightarrow p}$, que toman valores cuyo cociente $g_A/g_V = -0.718$, y tales que $g_V^{\Lambda \rightarrow p}/g_V^{n \rightarrow p} = \tan\theta_c$, donde $\theta_c \simeq 13^\circ$ es el ángulo de Cabibbo, que relaciona la intensidad de los procesos con cambio de extrañeza con aquellos sin cambio de extrañeza.

Los procesos semileptónicos en los que se crean o aniquilan mesones, por ejemplo, el decaimiento del π^- , se describen de forma análoga, tomando

$$j_\mu^{+\pi} = f_\pi \partial_\mu \phi_\pi(x)$$

donde f_π es la constante de decaimiento débil del pión, que vale 128 MeV.

4.3.3 Procesos no-leptónicos.

Son los procesos en los que solamente intervienen hadrones, como el decaimiento de la Λ en protón y pión. Por similitud con los casos anteriores, el lagrangiano puede escribirse como:

$$\mathcal{L}^d = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\mu^{-\pi} j_\mu^{+\Lambda \rightarrow p}$$

En este caso, todas las constantes están determinadas por los procesos semileptónicos asociados, por lo que pueden hacerse comparaciones directas con medidas experimentales. Estas comparaciones avalan la validez de la descripción. No obstante, en los procesos no leptónicos, la interacción fuerte juega un papel muy importante, y puede modificar de forma importante los resultados del cálculo que considere únicamente el efecto de la interacción débil.

El efecto de la interacción débil se describe mediante el calculo de los diagramas de Feynmann relevantes. A efectos de estimar las secciones eficaces y las probabilidades de decaimiento, puede utilizarse la regla de oro de Fermi, teniendo en cuenta que el elemento de matriz del hamiltoniano pueden estimarse por las expresiones siguientes:

- Procesos en que intervienen cuatro fermiones reales (un vértice):

$$\langle i|H|f \rangle \simeq \frac{G_F}{(\hbar c)^3} \frac{(\hbar c)^3}{\Omega}$$

- Procesos en que intervienen dos fermiones reales y un mesón real (un vértice):

$$\langle i|H|f \rangle \simeq \frac{G_F}{(\hbar c)^3} f_M \sqrt{E_M} \sqrt{\frac{(\hbar c)^3}{\Omega}}$$

donde f_M es la constante de decaimiento débil del mesón, y E_M su energía.

4.3.4 Teoría del bosón vectorial intermedio.

La teoría de Fermi del decaimiento débil viene caracterizada por una constante G_F , que no es adimensional. Ello hace que la teoría no sea renormalizable, y no pueda llevarse más allá del primer orden.

No obstante, la estructura del lagrangiano sugiere que la interacción entre dos corrientes puede ser considerada como un proceso de segundo orden en el cual una corriente se acopla a un campo asociado a un bosón vectorial (de espín uno), y este campo se acopla a la otra corriente. El bosón vectorial intermedio tiene una masa muy alta, de forma que, en procesos de baja energía, aparece como una partícula virtual durante un tiempo muy corto.

Así, la interacción débil se describe como el acoplamiento con dos campos conjugados, W_μ y W_μ^* tales que W_μ aniquila una partícula de masa m_W de carga negativa, o crea su antipartícula, mientras que W_μ^* hace lo contrario. El decaimiento del neutrón, por tanto, vendría descrito por un proceso de segundo orden, en el cual primero el neutrón decae en un protón y una partícula virtual W^- , mediante el término del lagrangiano

$$\mathcal{L}^d = \frac{g_w}{\sqrt{8}} W_\mu(x) j_\mu^{+n \rightarrow p}(x)$$

y luego la partícula W^- decae en electrón y antineutrino, por

$$\mathcal{L}^d = \frac{g_w}{\sqrt{8}} W_\mu(x)^* j_\mu^{-el}(x)$$

El factor $\sqrt{8}$ se introduce para que esta expresión sea equivalente a la que se obtiene en la teoría electrodébil. La relación de G_F con g_w viene dada por

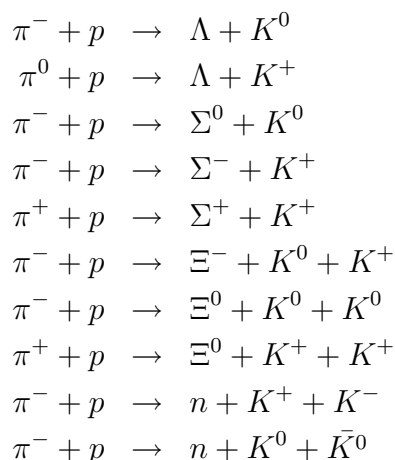
$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_w^2}{8m_W^2}.$$

esta expresión implica que si g_w es del orden de e , entonces m_W es del orden de 37 GeV. El bosón vectorial W^\pm ha sido detectado, y su masa es de 80.41 GeV. Por tanto $g_w = 0.6531 > e$. Podría decirse que la interacción débil es más “fuerte” que la electromagnética, pero se ve reducida por el hecho de que su bosón intermediario (el W^\pm) es mucho más masivo que el fotón. No obstante, en procesos que ocurren a energías altas, la interacción débil compite con la electromagnética, y los neutrinos interactúan con la materia tanto o más que los electrones.

En principio cabría la posibilidad de que existan corrientes neutras, en las que, por ejemplo, un neutrino fuera dispersado por un protón o un neutrón, sin convertirse en electrón. Estos procesos estarían asociados a un bosón intermedio de carga nula, el Z^0 . Con el desarrollo de los aceleradores, fueron encontrándose indicios de la existencia de estas corrientes débiles neutras.

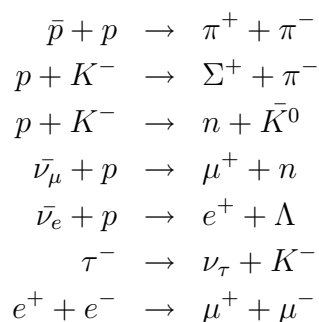
4.4 Problemas

1) Considerar las siguientes reacciones, que ocurren con secciones eficaces compatibles con la interacción fuerte:



Obtener los diagramas de Feynmann más simples para los procesos anteriores debidos a la interacción fuerte. Evaluar los valores de las constantes de acoplo de los vértices atendiendo a la conservación del isospín.

2) Considera las reacciones siguientes:



- Indicar qué procesos ocurren por interacción fuerte, electromagnética y débil.
- Obtener en cada caso el diagrama de Feynmann más simple que contribuye a la reacción.
- Obtener cuál es la energía cinética mínima de las partículas iniciales en el sistema centro de masas para que ocurra la reacción. Para este caso, obtener las energías y momentos de las partículas finales, y de la partícula virtual, en su caso.
- Estimar el elemento de matriz del hamiltoniano.

Chapter 5

Simetrías discretas

Un sistema tiene una simetría determinada cuando sus propiedades no se modifican cuando el sistema se somete a una transformación determinada. Ejemplos de transformaciones son las traslaciones espaciales, las rotaciones, las traslaciones temporales, etc. Estas transformaciones son continuas, pues vienen determinadas por variables continuas (vector desplazamiento, ángulo de rotación, desplazamiento de tiempos). La simetría de un sistema frente a este tipo de transformaciones, lleva asociada la conservación de una magnitud del sistema. Para los casos anteriores, éstas son el momento lineal total, el momento angular total y la energía total.

No obstante, existe otro tipo de transformaciones que son discretas. Estas son:

Inversión espacial o paridad P

Consiste en invertir el signo de todas las coordenadas de las partículas que componen el sistema: $\vec{r}_i \rightarrow -\vec{r}_i$. Por extensión, supone que todos los vectores polares (como \vec{r} o \vec{p}) cambian de signo, mientras que los vectores axiales (como $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$) no se modifican.

La inversión espacial exige tomar un origen de coordenadas determinado, y, por tanto, la operación inversión espacial depende de este origen. No obstante, si el sistema que consideramos es invariante frente a traslaciones, la elección del origen de coordenadas es irrelevante. Si el sistema no es invariante frente a traslaciones (por ejemplo, una partícula en un campo externo), pero es invariante frente a rotaciones en torno a un origen O (por ejemplo, un campo central), este origen es el que debe elegirse para realizar la inversión.

La consecuencia de la invariancia de un sistema frente a inversión espacial es que la probabilidad de un proceso de colisión es la misma de la del proceso obtenido mediante inversión espacial, es decir, cambiando de signo las posiciones y velocidades de todas las partículas participantes.

Conjugación de carga o paridad C

Consiste en cambiar el signo de la carga eléctrica y de los demás números cuánticos aditivos de todas las partículas del sistema. Ello hace que todas las magnitudes derivadas de la carga (momento magnético, campo eléctrico, campo magnético, potencial vector) cambien de signo. La masa no es un número cuántico aditivo. Para un sistema relativista, viene determinada por $m^2 = E^2 - \vec{p}^2$ y es intrínsecamente positiva. Por tanto, no se modifica por la conjugación de la carga.

La consecuencia de la invariancia de un sistema frente a conjugación de carga es que la probabilidad de un proceso de colisión que ocurre entre partículas es la misma del proceso que ocurre entre las antipartículas correspondientes.

Inversión temporal **T**

Consiste en cambiar el signo del tiempo. Hace que las magnitudes derivadas (velocidad, momento lineal, momento angular) cambien de signo.

En este caso, como en la inversión espacial, la operación inversión temporal depende del origen de tiempos. No obstante, si el sistema es invariante frente a traslaciones temporales (y, por tanto, conserva la energía total), la elección del origen de tiempos es irrelevante.

La consecuencia de la invariancia de un sistema frente a inversión temporal es que la probabilidad de un proceso de colisión es la misma del proceso inverso, en el que se cambian las partículas incidentes por las salientes.

5.1 Simetrías discretas en mecánica clásica

En mecánica clásica, la invariancia de un sistema frente a las transformaciones discretas se manifiesta en que, si partimos de una solución de las ecuaciones del movimiento del sistema y realizamos la transformación discreta, se obtiene otra solución de las ecuaciones de movimiento. Ello es equivalente a considerar que el lagrangiano (o el hamiltoniano) del sistema son invariantes frente a las transformaciones.

El hamiltoniano de un sistema clásico, en ausencia de fuerzas externas, debe ser invariante frente a rotaciones. Por ello, los términos que aparecen en el hamiltoniano deben ser escalares, o pseudo-escalares. Si el hamiltoniano es, además, invariante frente a inversión espacial, los términos deben ser escalares estrictamente hablando. Términos de tipo $\vec{L} \cdot \vec{p}$, que son pseudo-escalares, cambian de signo frente a inversión espacial, por lo que, si un hamiltoniano los contiene, no es invariante frente a transformaciones de paridad. Los hamiltonianos clásicos habituales (sistemas de partículas con interacción gravitatoria o electromagnética, sólido rígido, ...) son invariantes frente a transformaciones de paridad.

La conjugación de carga en mecánica clásica tiene sentido sobre todo para la interacción electromagnética. Si se cambian de signo las cargas de todas las partículas interactuantes en un sistema, cambian de sentido los campos eléctricos y magnéticos que generan, con lo cual las fuerzas permanecen invariantes. La interacción electromagnética es, por tanto, invariante frente a conjugación de carga.

En ausencia de fuerzas disipativas, el lagrangiano clásico contiene siempre un número par de operadores derivada con respecto al tiempo de las coordenadas. La energía cinética depende, en general, de dos derivadas primeras, mientras que la energía potencial es independiente del tiempo. Ello hace que el hamiltoniano sea invariante frente a inversión temporal. En general, el hamiltoniano no debe contener términos de tipo $\vec{r} \cdot \vec{p}$. Estos términos son los que generan fuerzas disipativas, como el rozamiento. En mecánica clásica se considera que estas fuerzas disipativas se deben a interacciones con el medio, que no se incluyen explícitamente en el hamiltoniano. Una descripción fundamental de un sistema clásico debe manifestar la inversión temporal, lo cual se manifiesta en que en las ecuaciones de movimiento aparecen solo derivadas de orden par en el tiempo.

5.2 Simetrías discretas en mecánica cuántica no relativista

5.2.1 Inversión espacial

La operación de inversión espacial o paridad viene descrita en mecánica cuántica no relativista por un operador P , unitario ($P^{-1} = P^+$) y hermítico ($P = P^+$), tal que, actuando sobre los operadores coordenada \vec{r} , dan $P\vec{r}P = -\vec{r}$. De la misma forma, P cambia el signo de todos los operadores que corresponden clásicamente a vectores polares, y no modifica los operadores que corresponden a vectores axiales. Así, $P\vec{L}P = \vec{L}$.

Queda describir el efecto del operador paridad sobre variables que no tienen análogo clásico. En mecánica cuántica no relativista, el operador P no actúa sobre las variables de espín. Así, sobre una función de onda de una partícula de coordenada \vec{r} y variable de espín ξ , se tiene $P\Psi(\vec{r}, \xi) = \Psi(-\vec{r}, \xi)$. Si la función de onda orbital de la partícula viene caracterizada por un momento angular orbital l , las propiedades de los armónicos esféricos hacen que $P\Psi(\vec{r}, \xi) = (-1)^l\Psi(\vec{r}, \xi)$. Para una partícula A, caracterizada por una función de onda con números cuánticos n, l, s, j, m_j , el efecto de P viene dado por

$$P|A; n, l, s, j, m_j \rangle = \eta_P(A)(-1)^l|A; n, l, s, j, m_j \rangle$$

donde, $\eta_P(A)$ es la paridad intrínseca de la partícula A, que puede tomar los valores ± 1 . Del mismo modo, para un sistema de partículas $A_1 \dots A_n$ cuya función de onda se describe como un producto de funciones de onda monoparticulares con momento angular orbital $l_1 \dots l_n$, la paridad del estado es $\eta_P(A_1)(-1)^{l_1} \dots \eta_P(A_n)(-1)^{l_n}$.

En mecánica cuántica no relativista, las partículas que constituyen un sistema cuántico (electrones en un átomo, protones y neutrones en un núcleo) no se crean ni se destruyen. Por tanto, las paridades intrínsecas de estas partículas constituyen un factor constante en la acción del operador paridad, por lo que son irrelevantes. No obstante, este no es el caso en teoría cuántica de campos.

Un sistema es invariante frente a transformaciones de paridad cuando el hamiltoniano no se modifica ante la actuación de P: $PHP = H$, o bien $[P, H] = 0$. Nótese que la invariancia frente a rotaciones implica que $[H, \vec{J}] = 0$. Además, $[P, \vec{J}] = 0$. Por tanto, si, para un sistema, $[P, H] = 0$, los autoestados sistema pueden caracterizarse por los números cuánticos j, m_j y por el autovalor del operador paridad, que puede tomar los valores ± 1 .

5.2.2 Conjugación de carga

La operación conjugación de carga viene descrita por un operador C , unitario ($C^{-1} = C^+$) y hermítico ($C = C^+$), cuyo efecto consiste en cambiar partículas por anti-partículas. Así, no sólo se cambia el signo de la carga eléctrica ($CQC = -Q$), sino también el de todos los números cuánticos aditivos (número bariónico, números leptónicos, extrañeza). El operador conjugación de carga no altera a las variables orbitales o de espín de las partículas.

Para una partícula A, caracterizada por una función de onda con números cuánticos n, l, m_l, s, m_s , el efecto de C viene dado por

$$C|A; n, l, s, j, m_j \rangle = \eta_C(A)|\bar{A}; n, l, s, j, m_j \rangle$$

donde \bar{A} es la antipartícula de A , y $\eta_C(A)$ puede valer ± 1 . Un sistema es invariante frente a conjugación de carga cuando el hamiltoniano no se modifica ante la actuación de C : $CHC = H$, o bien $[P, H] = 0$. El operador conjugación C de carga no conmuta con el operador carga eléctrica, ni con los otros operadores que corresponden a números cuánticos aditivos (B, S, \dots). Por tanto, solamente en es caso de sistemas totalmente neutros (todos sus números cuánticos aditivos cero) pueden considerarse estados con un número cuántico C (paridad C) bien definido.

5.2.3 Inversión temporal

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es

$$i\hbar \frac{d\Psi(t)}{dt} = H(t)\Psi(t).$$

Se define la operación de inversión temporal mediante el operador T tal que $T\Psi(t) = \Psi^*(-t)$. Cuando $H(t) = H^*(-t)$, entonces, si $\Psi(t)$ es una solución de la ecuación de Schrödinger, también lo es $T\Psi(t) = \Psi^*(-t)$.

El operador T cumple que $T = T^{-1}$, pero no es un operador lineal:

$$T(a_1\Psi_1(t) + a_2\Psi_2(t)) = a_1^*\Psi_1^*(-t) + a_2^*\Psi_2^*(-t)$$

por tanto, no es hermítico, y no tiene sentido hablar de autovalores o autoestados de T .

El operador T deja invariante los operadores hermíticos independientes del tiempo, $T\vec{r}T = \vec{r}$, pero cambia de signo los momentos lineales $T\vec{p}T = -\vec{p}$ y angulares $T\vec{L}T = -\vec{L}$. También cambia de signo el operador espín. Para una partícula A , caracterizada por una función de onda con números cuánticos n, l, s, j, m_j , eligiendo la fase de los estados de forma adecuada, el efecto de T viene dado por

$$T|A; n, l, s, j, m_j \rangle = \eta_T(A)(-1)^{j+m_j}|A; n, l, s, j, -m_j \rangle$$

donde $\eta_T(A)$ puede tomar valores ± 1 .

Un sistema es invariante frente a inversión temporal cuando su hamiltoniano cumple $TH(t)T = H^*(-t)$. Si el hamiltoniano es independiente del tiempo, entonces la condición es que H sea hermítico.

5.3 Simetrías discretas en teoría cuántica de campos

5.3.1 Inversión espacial

El hamiltoniano de una partícula libre de Dirac con espín 1/2 viene dado por

$$H_0 = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$$

Este hamiltoniano no es invariante frente a inversión espacial, si los operadores $\vec{\alpha}$ y β , que actúan sobre las variables internas, no se modifican. Si se exige que H_0 sea invariante frente a inversión espacial, debe ocurrir que $P\vec{\alpha}P = -\vec{\alpha}$, y $P\beta P = \beta$. Como los operadores $\vec{\alpha}$ y β tienen la propiedad $\beta\vec{\alpha}\beta = -\vec{\alpha}$, y $\beta\beta\beta = \beta$, la invariancia de H_0 frente a P puede conseguirse exigiendo que el operador paridad, además de cambiar $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ y $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$,

actúe como el operador β sobre las variables internas. El operador β , que coincide con γ_4 , deja invariante las componentes de partícula y cambia de signo las de anti-partícula.

En teoría cuántica de campos, los operadores de creación y aniquilación de partículas y antipartículas se obtienen de la cuantización de los campos fermiónicos. De las propiedades de transformación de estos campos, y considerando que el vacío es invariante frente a transformaciones de paridad ($P|0\rangle = |0\rangle$), se obtiene que, para un fermión f de momento \vec{p} y helicidad s , se cumple

$$P|f\vec{p}s\rangle = \eta_p(f)|f - \vec{p} - s\rangle$$

Igualmente, para su anti-partícula \bar{f} ,

$$P|\bar{f}\vec{p}s\rangle = -\eta_p(f)|\bar{f} - \vec{p} - s\rangle$$

donde $\eta_p = \pm 1$ es la paridad intrínseca del fermión, es decir, la que tiene. Así, la paridad intrínseca de un fermión es siempre la opuesta a la de su anti-fermión.

Los fotones se obtienen de la cuantización del potencial vector del campo electromagnético. Como éste es un vector axial, cambia de signo frente a paridad. Por tanto, $P\vec{A}(\vec{r}, t)P = -\vec{A}(-\vec{r}, t)$, y se obtiene que para un fotón γ

$$P|\gamma\vec{p}s\rangle = (-1)|\gamma - \vec{p} - s\rangle$$

Por ello, puede decirse que los fotones tienen paridad intrínseca negativa.

En general, los bosones pueden tener paridad intrínseca positiva o negativa. La paridad intrínseca del anti-bosón es la misma que la del bosón

5.3.2 Conjugación de carga

La operación de conjugación de carga para una partícula de Dirac corresponde a cambiar las componentes de partícula y de anti-partícula.

Desarrollando los campos fermiónicos en operadores de creación y aniquilación de partículas, y considerando que el vacío es invariante frente a conjugación de carga ($C|0\rangle = |0\rangle$), se obtiene que, para un fermión f de momento \vec{p} y helicidad s , se cumple

$$C|f\vec{p}s\rangle = \eta_c(f)|\bar{f}\vec{p}s\rangle$$

Igualmente, para su anti-partícula \bar{f} ,

$$C|\bar{f}\vec{p}s\rangle = \eta_c(f)|f\vec{p}s\rangle$$

donde $\eta_c(f) = \pm 1$.

Los fotones se obtienen de la cuantización del potencial vector del campo electromagnético. Como éste cambia de signo frente a conjugación de carga, $C\vec{A}(\vec{r}, t)C = -\vec{A}(\vec{r}, t)$, y se obtiene que para un fotón γ

$$C|\gamma\vec{p}s\rangle = (-1)|\gamma\vec{p}s\rangle$$

Por ello, puede decirse que los fotones tienen paridad-C negativa (nótese que los fotones son totalmente neutros).

5.3.3 Inversión temporal

La operación de inversión temporal para una partícula de Dirac corresponde a cambiar el momento de la partícula y de anti-partícula. La helicidad se mantiene constante, ya que también cambia el momento angular.

Desarrollando los campos fermiónicos en operadores de creación y aniquilación de partículas, y considerando que el vacío es invariante frente a conjugación de carga ($T|0\rangle = |0\rangle$), se obtiene que, para un fermión f de momento \vec{p} y helicidad s , se cumple

$$T|f\vec{p}s\rangle = \eta_T(f)|f - \vec{p}s\rangle$$

Igualmente, para su anti-partícula \bar{f} ,

$$T|\bar{f}\vec{p}s\rangle = \eta_T(f)|\bar{f} - \vec{p}s\rangle$$

donde $\eta_T = \pm 1$.

Los fotones se obtienen de la cuantización del potencial vector del campo electromagnético. Como éste cambia de signo frente a inversión temporal, $T\vec{A}(\vec{r}, t)T = -\vec{A}(\vec{r}, t)$, pero también lo hacen los vectores que caracterizan la polarización circular debido al carácter no lineal del operador T . Se obtiene que para un fotón γ

$$T|\gamma\vec{p}s\rangle = (+1)|\gamma - \vec{p}s\rangle$$

5.4 Paridad y conjugación de carga de sistemas de partículas

5.4.1 Sistemas de fotones

Cada fotón tiene paridad-C -1 , independiente de su estado de movimiento. Por tanto, un sistema de n fotones tiene paridad-C $(-1)^n$.

Los fotones tienen paridad-P intrínseca -1 . Eso quiere decir que, en un hipotético sistema de referencia en que el fotón esté en reposo, su paridad sería -1 . Los fotones reales se mueven a la velocidad de la luz, por lo que no es posible que estén en reposo. La paridad de un fotón real depende de su estado de movimiento, y en concreto, depende de cómo se acople su momento angular intrínseco $J = 1$, a su momento angular relativo. Así se habla de fotones de tipo $E\lambda$ (momento angular total λ y paridad $(-1)^\lambda$) y fotones de tipo $M\lambda$ (Momento angular total λ y paridad $-(-1)^\lambda$).

En el caso de los fotones virtuales, como el que aparece en una aniquilación electrón-positrón, sí puede tomarse un sistema de referencia en el que estén en reposo. En ese sistema, su momento angular es $J = 1$ y su paridad (-1) .

5.4.2 Sistemas fermión-antifermión

La paridad-P de un sistema fermión-antifermión es igual al producto de las paridades intrínsecas del fermión y del antifermión, que son siempre opuestas, por la del movimiento relativo, que es $(-1)^L$. Por tanto, $P(f\bar{f}) = -(-1)^L$.

Para obtener la paridad-C de un sistema fermión-antifermión, con momento angular orbital L y espín S , es conveniente expresar explícitamente su función de onda, que debe

ser anti-simétrica:

$$\Psi(1, 2) = \Psi_f(1)\Psi_{\bar{f}}(2)\phi_L(\vec{r}_{12})\chi_S(\xi_1, \xi_2) - \Psi_f(2)\Psi_{\bar{f}}(1)\phi_L(\vec{r}_{21})\chi_S(\xi_2, \xi_1)$$

El operador C cambia f en \bar{f} , dejando las variables orbitales y de espín inmutables:

$$C\Psi_f(1)\Psi_{\bar{f}}(2) = \Psi_{\bar{f}}(1)\Psi_f(2)$$

Por otro lado, $\phi_L(\vec{r}_{12}) = (-1)^L\phi_L(\vec{r}_{21})$, y $\chi_S(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{S-2s_f}\chi_S(\xi_2, \xi_1)$, donde s_f es el espín del fermión. Esto lleva a que $C\Psi(1, 2) = (-1)^{L+S-2s_f+1}\Psi(1, 2)$. Como los fermiones tienen espín semientero, $-2s_f+1$ es par, luego la paridad-C del sistema fermión-antifermión viene dada por $(-1)^{L+S}$.

5.4.3 Sistemas bosón-antibosón

Los fermiones tienen siempre una anti-partícula. Los bosones pueden ser totalmente neutros, en cuyo caso coinciden con su anti-partícula, (como el fotón, el pión neutro, etc), o bien pueden tener carga eléctrica, o algún otro número cuántico, en cuyo caso el bosón y el antibosón son diferentes.

La paridad-P de un sistema bosón-antibosón es igual al producto de las paridades intrínsecas del bosón y del antibosón, que son siempre iguales, por la del movimiento relativo, que es $(-1)^L$. Por tanto, $P(b\bar{b}) = +(-1)^L$.

Para obtener la paridad-C de un sistema bosón-antibosón, con momento angular orbital L y espín S, es conveniente expresar explícitamente su función de onda, que debe ser simétrica:

$$\Psi(1, 2) = \Psi_b(1)\Psi_{\bar{b}}(2)\phi_L(\vec{r}_{12})\chi_S(\xi_1, \xi_2) + \Psi_b(2)\Psi_{\bar{b}}(1)\phi_L(\vec{r}_{21})\chi_S(\xi_2, \xi_1)$$

El operador C cambia b en \bar{b} , dejando las variables orbitales y de espín inmutables:

$$C\Psi_b(1)\Psi_{\bar{b}}(2) = \Psi_{\bar{b}}(1)\Psi_b(2)$$

Por otro lado, $\phi_L(\vec{r}_{12}) = (-1)^L\phi_L(\vec{r}_{21})$, y $\chi_S(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{S-2s_b}\chi_S(\xi_2, \xi_1)$, donde s_b es el espín del bosón. Esto lleva a que $C\Psi(1, 2) = (-1)^{L+S-2s_b}\Psi(1, 2)$. Como los bosones tienen espín entero, $-2s_b$ es par, luego la paridad-C del sistema bosón-antibosón viene también dada por $(-1)^{L+S}$.

5.4.4 Partículas totalmente neutras

Estas partículas, que son siempre bosones, coinciden con sus anti-partículas, y tienen, por tanto, paridad-C bien definida. En el caso del fotón, hemos visto que $C(\gamma) = -1$. Las partículas neutras que decaen en un número par de fotones (π^0, η, η') tienen paridad-C positiva. Las que decaen en un número impar de fotones (ρ^0, ω, ϕ) tienen paridad-C negativa. Los sistemas de estas partículas tienen paridad-C igual al producto de las paridades-C de las partículas del sistema.

5.5 Conservación y violación de las simetrías discretas

En general, la evidencia experimental de los procesos de física atómica y nuclear indican que la interacción fuerte y electromagnética conservan P y C. Ello permite relacionar la

paridad-P intrínseca a las partículas que se crean o se aniquilan en procesos fuertes o electromagnéticos, así como asignar paridad-C a las partículas totalmente neutras. Si, por convenio, se toma que la paridad-P intrínseca del protón y el neutrón es +1, entonces pueden deducirse las paridades de todos los hadrones con extrañeza cero. En concreto, se encuentra que los piones tienen paridad-P -1. Del mismo modo, tomando que la paridad-P de la Λ es +1, se deducen las paridades de todos los hadrones con extrañeza no nula.

5.5.1 Violación de la paridad P por la interacción débil

La evidencia experimental de que la interacción débil violaba la paridad-P llegó en 1957. Wu investigó el decaimiento beta de ^{60}Co , que tiene espín 5^+ , y decae en $^{60}\text{Ni} + e^- + \nu$. Introdujo los átomos de ^{60}Co en un campo magnético intenso, y observó que los electrones se emitían con mayor probabilidad en la dirección del campo magnético que en la opuesta. Este hecho implica una violación de la paridad, ya que la inversión espacial invierte el momento de los electrones, pero no el campo magnético, por lo que la emisión de electrones en ambas direcciones debe tener la misma probabilidad.

Esta asimetría se explica debido a que los anti-neutrinos tienen helicidad positiva. El electrón y el neutrino se emiten con mayor probabilidad en direcciones opuestas (por la densidad de estados), pero sus espines son paralelos, y van dirigidos preferentemente en la dirección opuesta al campo magnético. Como el anti-neutrino tiene helicidad positiva, se emite en la dirección opuesta al campo magnético, por lo que el electrón se emite en la dirección del campo magnético.

El hecho de que los neutrinos tengan helicidad definida hace que la interacción débil viole P y C. Para un neutrino con momento \vec{p} y helicidad $s = -1/2$,

$$\begin{aligned} P|\nu \vec{p} s = -1/2 \rangle &= \eta_P |\nu -\vec{p} s = 1/2 \rangle \\ C|\nu \vec{p} s = -1/2 \rangle &= \eta_C |\bar{\nu} \vec{p} s = -1/2 \rangle \\ PC|\nu \vec{p} s = -1/2 \rangle &= \eta_P \eta_C |\bar{\nu} -\vec{p} s = 1/2 \rangle \end{aligned}$$

Como los neutrinos con helicidad positiva y los antineutrinos con helicidad positiva no existen, o al menos no sienten la interacción débil, P y C, por separado, no son conservados por la interacción débil. No obstante, sí existen los antineutrinos con helicidad positiva, por lo que PC sí podría, en principio, ser conservada por la interacción débil.

En los procesos débiles en los que no aparecen neutrinos también se viola la paridad. Ello se debe a que en las corrientes aparece $g_V + \gamma_5 g_A$. El operador γ_5 se modifica frente a P y C cambiando de signo. Por tanto,

$$\begin{aligned} P(g_V + \gamma_5 g_A)P &= g_V - \gamma_5 g_A \\ C(g_V + \gamma_5 g_A)C &= g_V - \gamma_5 g_A \\ PC(g_V + \gamma_5 g_A)CP &= g_V + \gamma_5 g_A \end{aligned}$$

Por ello, P y C no dejan invariante la densidad lagrangiana de la interacción débil, pero sí lo hace, en principio, PC, supuesto que las constantes g_V y g_A sean las mismas para partículas y antipartículas. La invariancia frente a inversión temporal requiere que g_V y g_A sean reales. Como veremos posteriormente, este no es el caso, ya que hay una pequeña parte de la interacción débil que viola CP, y, por tanto T, pero conserva $I = CPT$.

5.5.2 El teorema CPT

La conservación de las simetrías C , P y T por separado, que se da en mecánica clásica, no tiene por qué ocurrir en mecánica cuántica. De hecho, la interacción débil viola fuertemente las simetrías C y P , y también, en menor medida, CP y T . No obstante, existen razones teóricas fuertes para considerar que la transformación $I = CPT$ debe conservarse exactamente.

El enunciado del teorema es el siguiente: Si la densidad lagrangiana que describe una teoría es un operador hermítico e invariante de Lorentz, construido a partir del producto en orden normal de operadores de campo que satisfacen la relación entre el espín y la estadística, entonces la transformación $I = PCT$ es una simetría de la teoría.

La conservación de $I = CPT$, que hace que el hamiltoniano del sistema sea invariante frente a I ($IHI = H$), tiene importantes consecuencias. Estas consecuencias dependen solamente de la conservación de I . C , P y T , por separado, no tienen que conservarse.

Para hablar con precisión de partículas inestables, consideramos que $H = H_0 + H'$, de forma que H_0 define las partículas y H' es responsable de los decaimientos. Se toman de forma que $IH_0I = H_0$ y $IH'I = H'$. Sea $|A, jm\rangle$ el estado de una partícula (o sistema de partículas) A , con momento lineal nulo (y por tanto momento angular orbital $l=0$), y con momento angular j y proyección m . $|A, jm\rangle$ es un autoestado de H_0 . Este estado no tiene propiedades de transformación bien definidas frente a P , C y T por separado, pero cuando se actúa sobre él con I se obtiene

$$I|A, jm\rangle = CPT|A, jm\rangle = \eta_I |\bar{A}, j - m\rangle$$

donde η_I es una cierta fase. Nótese que $I|A, jm\rangle$ es también autoestado de H_0 . Ello permite definir el concepto de antipartícula, incluso en casos en que H_0 no conmuta con C .

Igualdad de masa de partículas y antipartículas.

La "masa" de A es el elemento de matriz del hamiltoniano:

$$m(A)c^2 = \langle A, jm | H | A, jm \rangle = \langle A, jm | I(IHI)I | A, jm \rangle$$

Pero $IHI = H$, y además,

$$I|A, jm\rangle = \eta_I |\bar{A}, j - m\rangle$$

Entonces,

$$m(A)c^2 = \langle \bar{A}, j - m | H | \bar{A}, j - m \rangle = m(\bar{A})c^2$$

Nótese que el elemento de matriz del Hamiltoniano no puede depender de la proyección m de j ya que H es un escalar.

Propiedades electromagnéticas opuestas de partículas y antipartículas.

La carga de A es el elemento de matriz del operador Q :

$$Q(A) = \langle A, jm | Q | A, jm \rangle = \langle A, jm | I(IQI)I | A, jm \rangle$$

Pero Q es independiente de P y T , luego $IQI = CQC = -Q$, y además,

$$I|A, jm\rangle = \eta_I |\bar{A}, j - m\rangle$$

Luego $Q(A) = -Q(\bar{A})$. De forma análoga, puede obtenerse que el momento magnético, momento dipolar eléctrico, momento cuadrupolar eléctrico, etc, de partícula y antipartícula son opuestos.

Vidas medias iguales de partículas y antipartículas.

El decaimiento de A ocurre porque el hamiltoniano H puede expresarse como $H_0 + H'$. El estado $|A, jm\rangle$ es autoestado de H_0 , pero H' puede generar transiciones a otros auto-estados $|B, jm\rangle$ de H_0 . La vida media viene dada por la regla de oro de Fermi

$$\tau(A)^{-1} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle A, jm | H' | B, jm \rangle|^2 \rho_B(m(A)c^2)$$

Considerando que $I H_0 I = H_0$, se tiene que la densidad de estados $\rho_B(M_A c^2)$ es la misma que la densidad de estados para las antipartículas $\rho_{\bar{B}}(m(\bar{A})c^2)$. Por otro lado, como $I H' I = H'$, se cumple que

$$|\langle A, jm | H' | B, jm \rangle|^2 = |\langle \bar{A}, j - m | H' | \bar{B}, j - m \rangle|^2$$

Esto, junto con la invariancia rotacional de H' , llevan a que $\tau(A) = \tau(\bar{A})$.

5.5.3 Los kaones neutros. Violación de CP

Si las partículas elementales se caracterizan por la extrañeza, K_0 y \bar{K}_0 son partículas bien diferenciadas. Una tiene $S = 1$ y la otra $S = -1$. Por otro lado, ambas tienen paridad negativa $P|K_0\rangle = -|K_0\rangle$, $P|\bar{K}_0\rangle = -|\bar{K}_0\rangle$, y son un la antipartícula de la otra: $C|K_0\rangle = |\bar{K}_0\rangle$, $C|\bar{K}_0\rangle = |K_0\rangle$. Por el teorema CPT, ambas tienen la misma masa. No obstante, la interacción débil no conserva la extrañeza, por lo que pueden existir términos del hamiltoniano que conecten $|K_0\rangle$ y $|\bar{K}_0\rangle$. Estos términos, aunque sean muy pequeños, tienen un efecto muy importante, ya que los elementos de matriz diagonales del hamiltoniano son iguales.

Para obtener los autoestados del hamiltoniano, podemos suponer que, aunque la interacción débil viola P y C, conserva PC. Por tanto, los autoestados de PC lo serán también del hamiltoniano. Así,

$$\begin{aligned} |K_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0\rangle - |\bar{K}_0\rangle) \quad , \quad CP|K_S\rangle = (+1)|K_S\rangle \\ |K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_0\rangle + |\bar{K}_0\rangle) \quad , \quad CP|K_L\rangle = (-1)|K_L\rangle \end{aligned}$$

Los estados que aparecen en la naturaleza como partículas libres no son K_0 y \bar{K}_0 , sino sus combinaciones K_S y K_L . Entre ellas hay una pequeña diferencia de masas, debida al efecto de la interacción débil, $m(K_L) - m(K_S) = (3.489 \pm 0.008)10^{-6} eV$, pero la principal diferencia radica en el decaimiento. Como un sistema de dos piones tiene $CP = +1$, K_S puede decaer en dos piones por interacción débil, pero no así K_L , que debe decaer en tres piones o más. Por ello, la vida del K_S $(0.8935 \pm 0.0009)10^{-10} s$ es más corta que la del K_L $(5.17 \pm 0.04)10^{-8} s$.

La pequeña diferencia de masa entre K_S y K_L lleva al fenómeno conocido como “oscilaciones de kaones”. Supongamos que en un proceso de colisión se produce un K_0 . En el instante inicial, corresponde a una combinación

$$|\psi(t=0)\rangle = |K_0\rangle = (|K_L\rangle + |K_S\rangle)/\sqrt{2}.$$

Cada uno de los estados, $|K_S\rangle$ y $|K_L\rangle$ evoluciona en el tiempo de forma que adquiere una fase dependiente de su energía. Ello hace que, en un instante posterior, el estado sea

$$|\psi(t)\rangle = (\exp(im(K_L)t/\hbar)|K_L\rangle + \exp(im(K_S)t/\hbar)|K_S\rangle)/\sqrt{2}.$$

Si este estado lo expresamos en la base $|K_0\rangle, |\bar{K}_0\rangle$, encontramos que oscila entre K_0 y \bar{K}_0 en función del tiempo, con un tiempo característico $\delta t = \pi\hbar/(m(K_L) - m(K_S)) = 5.9210^{-10}s$.

Si la conservación de CP fuera exacta, entonces K_L no podría decaer en dos piones. De hecho, la probabilidad de decaimiento en dos piones es muy pequeña, pero no nula. El cociente de las probabilidades de transición viene dado por:

$$|\eta|^2 = \frac{P(K_L \rightarrow 2\pi)}{P(K_S \rightarrow 2\pi)} = (2.262 \cdot 10^{-3})^2$$

Por otro lado, la violación de CP se muestra más claramente comparando los decaimientos

$$K_L \rightarrow \pi^- e^+ \nu \quad (1)$$

$$K_L \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu} \quad (2)$$

Ambos procesos debieran tener la misma probabilidad, si CP se conservara. No obstante, se observa que

$$\delta = \frac{P(1) - P(2)}{P(1) + P(2)} = 3.27 \cdot 10^{-3}$$

De todo esto, podemos concluir que la interacción débil viola fuertemente P y C. También viola PC, pero sólo en unas partes en 1000. De un análisis más detallado de las fases de η , se llega a la conclusión de que CPT se conserva, con lo que T se viola por unas partes en 1000 de la interacción débil.

5.6 Problemas

1) Establecer cómo se transforman bajo las operaciones P, C y T las siguientes magnitudes clásicas: Posición \vec{r} , momento \vec{p} , momento angular \vec{L} , carga eléctrica q , momento dipolar eléctrico \vec{D} , momento magnético $\vec{\mu}$, densidad de carga ρ , densidad de corriente \vec{j} , campo eléctrico \vec{E} , campo magnético \vec{B} , potencial vector \vec{A} , potencial escalar V .

2) Demostrar que las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a las operaciones C, P y T:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E}/c^2 &= \vec{j} \end{aligned}$$

3) Demostrar que el operador paridad P conmuta con el operador que produce rotaciones en torno al eje x, $R_x(\phi) = \exp(-iL_x\phi)$. Demostrar que el operador conjugación de carga C no conmuta con el operador que produce transformaciones gauge asociadas a la carga eléctrica, $U(\phi) = \exp(-iQ\phi)$.

4) Obtener los valores de P, C y PC de un sistema de $\pi^+\pi^-$ con momento angular L. Hacer lo propio para un sistema $\pi^0\pi^0$.

5) Obtener los valores de P, C y PC para un sistema de $\pi^+\pi^-\pi^0$ con momento angular J=0. Hacer lo propio para un sistema $\pi^0\pi^0\pi^0$. Nota: el momento angular J del sistema se obtiene del acoplamiento del momento angular de dos piones L_{12} con el momento angular del tercero con respecto al centro de masas de los otros dos L_3 .

6) Obtener los valores de P, C y PC para un sistema e^-e^+ con momento angular orbital L, espín S y momento angular total J. Deducir los valores de L, S y J permitidos para que el sistema e^-e^+ provenga de la aniquilación de un fotón virtual.

7) Considera que una partícula $|A, jm\rangle$, en reposo, decae y produce otras partículas a, b, \dots . Nos fijamos en una de ellas a , que sale con un momento \vec{k}_a y una helicidad s_a . A partir de la regla de oro de Fermi, demuestra que la conservación de la paridad por la interacción que produce el decaimiento implica que:

a) La probabilidad de detectar la partícula con momento \vec{k}_a y helicidad s_a es la misma que la probabilidad de detectar la partícula con momento $-\vec{k}_a$ y helicidad $-s_a$

b) La probabilidad de detectar la partícula con momento \vec{k}_a es la misma que la probabilidad de detectar la partícula con momento $-\vec{k}_a$, si no se observa la helicidad.

c) El valor esperado de s_a , integrado para todos los momentos \vec{k}_a , es nulo.

8) El momento dipolar eléctrico de una partícula $d(A)$, o un sistema de partículas, es igual al valor esperado de la componente z del operador dipolar eléctrico $D_z = \sum_i q_i z_i$ para el estado con $m = j$: $d(A) = \langle A, jj | D_z | A, jj \rangle$. Demostrar que tanto si P se conserva, como si T se conserva, entonces $d(A)$ debe anularse. No obstante, si P y T se violan, pero PT se conserva, entonces puede ocurrir que $d(A)$ sea no nulo.

9) Cuando un pión negativo interacciona con un deuterón, que tiene J=1 y paridad positiva, se forma un “átomo piónico”, y el pión decae hasta el estado más bajo, con L=0. Entonces, reacciona por interacción fuerte con el deuterón, y se producen dos neutrones. Demostrar que, para que esto ocurra conservándose la paridad, el pión debe tener paridad intrínseca negativa. Nota: considerar la conservación del momento angular, y el carácter fermiónico de los neutrones.

Chapter 6

Teoría de Grupos

6.1 Introducción

En este tema se va a desarrollar la teoría de grupos desde una perspectiva general, y por tanto, abstracta. Por ello, es conveniente tener presente la relación de los conceptos abstractos con las nociones relevantes de un sistema cuántico:

- Elementos del grupo: Transformaciones que dejan (aproximadamente) invariante el hamiltoniano (Ejemplo: rotaciones).
- Representación de un grupo: Cuando las transformaciones de un grupo actúan sobre un sistema determinado, los estados de este sistema se modifican. A cada transformación del grupo, le corresponde (le representa) un operador lineal (o una matriz $n \times n$), que describe cómo se modifican los estados. La representación de un grupo es el conjunto de estos operadores lineales. (Ejemplo: las matrices que indican cómo cambian x , y , z bajo rotaciones).
- Representaciones irreducibles: Dentro de un sistema, existen subespacios vectoriales de estados que están fuertemente interconectados por las transformaciones del grupo, de tal manera que no hay ningún estado que esté desconectado de los demás (Ejemplo: los armónicos esféricos bajo rotaciones). Las representaciones del grupo en estos subespacios vectoriales se llaman irreducibles, y son características de cada grupo. (Ejemplo: las matrices \mathcal{D} que indican cómo se modifican los armónicos esféricos).
- Representación producto: Si tenemos un sistema compuesto de dos sistemas (1) y (2), los estados del sistema compuesto vendrán dados por el producto de los estados de (1) y (2). Las transformaciones del grupo modifican los estados del sistema compuesto, ya que modifican los estados de (1) y de (2). Los operadores lineales que describen estas transformaciones (que son simplemente el producto de los operadores de (1) por los de (2)), constituyen la representación producto. (Ejemplo: el producto de las matrices \mathcal{D} de la variable orbital por las matrices \mathcal{D} del espín).
- Serie de Clebsch-Gordan: En un sistema compuesto de dos sistemas (1) y (2), aunque tanto (1) como (2) generen representaciones irreducibles del grupo, los estados del sistema compuesto no generan representaciones irreducibles. No obstante, el espacio vectorial del sistema compuesto puede descomponerse en espacios vectoriales que sí

generan representaciones irreducibles. Esta descomposición es característica del grupo, y se denomina serie de Clebsh-Gordan. Los coeficientes que describen el desarrollo de los estados que generan las representaciones irreducibles en términos de los estados producto de (1) y (2) son los coeficientes de Clebsh-Gordan, y son también característicos del grupo. (Ejemplo: los coeficientes de Clebsh-Gordan que indican cómo se obtienen estados de momento angular total J a partir de productos de estados de momento angular orbital L y espín S).

6.2 Propiedades generales

Definición: Un grupo G es un conjunto de elementos a, b, c, \dots con una ley de composición \cdot que cumplen:

- 1) Interna: $\forall a, b \in G, a \cdot b \in G$
- 2) Asociativa: $\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 3) Neutro: $\exists e \in G, \forall a \in G, a \cdot e = e \cdot a = a$
- 4) Inverso: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Grupo Abeliano: Cumple $\forall a, b \in G, a \cdot b = b \cdot a$

Subgrupo: Subconjunto $S \in G$, que cumple $\forall a, b \in S, a \cdot b \in S$

Grupo producto directo: Si A y B son subgrupos de G , y todos los elementos de G pueden escribirse de forma única como $g = a \cdot b, a \in A, b \in B$, y $a \cdot b = b \cdot a$, entonces G es el grupo producto directo de A y B , $G = A \times B$. Si un grupo es producto de otros dos, todas sus propiedades pueden obtenerse a partir de las de sus factores.

Grupos isomorfos: Dos grupos $G = \{a, b, \dots, \cdot\}$ y $G' = \{a', b', \dots, \times\}$ son isomorfos si existe una correspondencia biunívoca tal que si $a \rightarrow a', b \rightarrow b'$, entonces $a \cdot b \rightarrow a' \times b'$. Los grupos isomorfos tienen la misma estructura.

Grupos discretos: Tienen un número discreto (finito o no) de elementos.

C_2 : Rotaciones de π . Z_2 : Enteros con la suma módulo 2. S_2 : Permutaciones de dos elementos. Todos estos grupos tienen dos elementos, son isomorfos y abelianos.

D_2 : Rotaciones de π con reflexiones. Tiene cuatro elementos, es abeliano y es isomorfo a $C_2 \times C_2$.

D_3 : Rotaciones de $2\pi/3$ con reflexiones. S_3 : Permutaciones de tres elementos. Tienen seis elementos, son isomorfos y no abelianos

Grupos continuos: Se definen en función de un número N de parámetros reales, donde N es el orden del grupo. Dentro de los grupos continuos, los grupos **compactos** se definen como aquellos en que los parámetros varían en un intervalo compacto (cerrado y acotado) de valores.

$GL(n)$: Transformaciones lineales no singulares en n dimensiones. Isomorfo a las matrices complejas $n \times n$ no singulares. $N = 2n^2$. No compacto.

$U(n)$: Transformaciones unitarias en n dimensiones. Isomorfo a las matrices unitarias $n \times n$ ($A^+ = A^{-1}$). $N = n^2$. Compacto.

$SU(n)$: Transformaciones unitarias especiales en n dimensiones. Isomorfo a las matrices unitarias $n \times n$ con determinante 1. $N = n^2 - 1$. Compacto.

SO(n): Transformaciones ortogonales en n dimensiones. Isomorfo a las matrices reales ortogonales $n \times n$ con determinante 1. $N = n(n - 1)/2$. Compacto. El grupo de las rotaciones en tres dimensiones es isomorfo a SO(3).

Grupo de Lorentz SO(3,1): Transformaciones que dejan invariante el intervalo $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Contiene las rotaciones, y los cambios de sistema de referencia. Tiene 6 parametros. No compacto.

6.3 Representación de grupos

Una representación de dimensión n de un grupo es un homomorfismo, en el que a cada elemento g del grupo se le hace corresponder una matriz $n \times n$ $D(g)$, de forma que si $a \cdot b = c$, entonces $D(a)D(b) = D(c)$.

Otra definición, equivalente a la anterior, es la siguiente: Una representación de un grupo sobre un espacio vectorial V de dimensión n es un homomorfismo, en el que a cada elemento de g se le hace corresponder un operador lineal $T(g)$ que actúa sobre los estados de V , de forma que si $a \cdot b = c$, entonces $T(a)T(b) = T(c)$. Esta definición es equivalente a la anterior, puesto que si tomamos una base de V $\{|i\rangle, i = 1, n\}$, a cada operador lineal le corresponde una matriz $n \times n$, definida por $D_{ij}(g) = \langle i|T(g)|j\rangle$.

Dos representaciones $D^{(1)}(g), D^{(2)}(g)$ son **equivalentes** si existe una matriz S tal que, para todo g , $D^{(1)}(g) = SD^{(2)}(g)S^{-1}$.

La representación **trivial**, de dimensión 1, corresponde a tomar, para todo g , $D(g) = 1$.

Una representación **fiel** es tal que, a elementos distintos del grupo le corresponden matrices distintas.

Una representación **unitaria** es tal que, a cada elemento del grupo, le corresponde una matriz unitaria. En el lenguaje de operadores lineales, a cada elemento del grupo le corresponde un operador lineal unitario, $T^+(g)T(g) = T(g)T^+(g) = 1$, que conserva el producto escalar.

Si una representación de un grupo viene dada por las matrices $D(g)$, la representación **conjugada** viene dada por las matrices $D(g)^+$.

Teorema de Maschke: Todas las representaciones de grupos finitos o de grupos compactos son equivalentes a representaciones unitarias.

Una representación es **reducible** si es equivalente a una en que todas las matrices $D(g)$ pueden expresarse como:

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

donde $A(g)$ y $B(g)$ son matrices cuadradas de dimensión n_1 y n_2 . En una representación reducible, los operadores $T(g)$ dejan invariante un subespacio de $S_1 \in V$ de dimensión n_1 . Por el contrario, en una representación **irreducible**, no hay subespacios invariantes.

Aplicando el teorema de Maschke a una representación reducible, puede encontrarse una representación unitaria equivalente, para la que $C(g) = 0$. Por tanto,

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

Esta representación se llama **descomponible**. El espacio vectorial V puede expresarse como suma directa de los subespacios S_1 y S_2 , que son ambos invariantes frente a las transformaciones del grupo. La representación $D(g)$ se descompone en la **suma** de las representaciones $A(g)$ y $B(g)$. A su vez, $A(g)$ y $B(g)$, o bien son irreducibles, o bien pueden descomponerse en suma de otras representaciones. Por tanto, una representación de un grupo finito o compacto, o es irreducible, o puede descomponerse en suma de representaciones irreducibles.

Las representaciones irreducibles de un grupo son características de cada grupo. Los grupos finitos tienen un número finito de representaciones irreducibles. Los grupos continuos compactos tienen un número infinito, pero numerable, de representaciones irreducibles. Podemos caracterizar cada representación irreducible por un índice λ . La dimensión de esta representación es $n(\lambda)$. Así, a cada elemento del grupo le corresponde, en la representación irreducible λ , una matriz $D_{\mu',\mu}^\lambda(g)$, donde $\mu, \mu' = 1, n_\lambda$. Para grupos finitos o compactos, estas matrices son unitarias. Por tanto,

$$\sum_{\mu} D_{\mu',\mu}^\lambda(g) D_{\mu'',\mu}^{\lambda*}(g) = \delta(\mu', \mu'')$$

Todos los grupos tienen como representación irreducible la representación trivial $\lambda = 0$, de dimensión $n(0) = 1$, tal que $D_{11}^0(g) = 1$.

Teorema: Si un espacio vectorial V genera una representación de un grupo finito o compacto, sus estados pueden caracterizarse por una base $|k\lambda\mu\rangle$, donde el subespacio vectorial cuya base es $|k\lambda\mu\rangle$, $\mu = 1, n_\lambda$ genera una representación irreducible caracterizada por λ , de dimensión n_λ . Por tanto, λ caracteriza la representación irreducible que genera el subespacio vectorial, μ caracteriza el estado concreto dentro de la base del subespacio vectorial y k es un índice adicional que diferencia distintos subespacios vectoriales que aparecen en la descomposición de V y que generan la representación irreducible λ .

Frente a las transformaciones del grupo, los estados $|k\lambda\mu\rangle$ se transforman según:

$$T(g)|k\lambda\mu\rangle = \sum_{\mu'} D_{\mu',\mu}^\lambda(g) |k\lambda\mu'\rangle$$

donde las matrices $D_{\mu',\mu}^\lambda(g)$ corresponden a cada representación irreducible del grupo. Son independientes del índice k , y de la naturaleza del espacio vectorial V .

Teorema fundamental de ortogonalidad: Las representaciones irreducibles de un grupo finito cumplen la relación:

$$\frac{1}{[G]} \sum_g D_{\mu'_1,\mu_1}^{\lambda_1*}(g) D_{\mu'_2,\mu_2}^{\lambda_2}(g) = \frac{1}{n(\lambda_1)} \delta(\lambda_1, \lambda_2) \delta(\mu_1, \mu_2) \delta(\mu'_1, \mu'_2).$$

$[G]$ es el número de elementos del grupo. En el caso de grupos compactos, la suma se sustituye por una integral sobre los parámetros, con un jacobiano adecuado.

Ejemplo: Sea el espacio vectorial V generado por todos los estados de una partícula en un potencial arbitrario. Este espacio vectorial genera una representación del grupo de las rotaciones: a cada elemento del grupo le corresponde un operador que genera rotaciones en el espacio de los estados. Esta representación, de dimensión infinita, es

descomponible. Una forma de descomponerla es expresar los estados en una base de autoestados de oscilador armónico: $|n, l, m\rangle$, donde n es el número de cuantos, l el momento angular y m su proyección. Estos estados, obviamente, no son autoestados del hamiltoniano de la partícula, pero constituyen una base en la que pueden desarrollarse todos los estados de V . En esta base, los operadores que describen la rotación de ángulos de Euler $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ tienen elementos de matriz dados por

$$\langle n', l', m' | R(\Omega) | n, l, m \rangle = \delta(n', n) \delta(l', l) \mathcal{D}_{m'l'm}^l(\Omega)$$

En esta expresión, las matrices de rotación $\mathcal{D}_{m'l'm}^l(\Omega)$ son las representaciones irreducibles del grupo de las rotaciones. Por tanto, l especifica la representación irreducible del grupo. m especifica el estado dentro de la representación irreducible, y n diferencia los diferentes subespacios que generan la misma representación irreducible. Nótese que los elementos de matriz de $R(\Omega)$ son independientes de n . De hecho, son independientes del sistema que estemos considerando (núcleo, molécula, átomo multielectrónico), siempre que consideremos estados que generen la misma representación irreducible.

Las matrices de rotación, como representaciones irreducibles del grupo de las rotaciones, cumplen la condición de ortogonalidad

$$\sum_m \mathcal{D}_{m',m}^l(\Omega) \mathcal{D}_{m'',m}^{l*}(\Omega) = \delta(m', m''),$$

y, aplicando el teorema fundamental de gran ortogonalidad, se obtiene la condición

$$\frac{1}{8\pi^2} \int d\Omega \mathcal{D}_{m_1, m_1}^{l_1*}(\Omega) \mathcal{D}_{m_2, m_2}^{l_2}(\Omega) = \frac{1}{2l_1 + 1} \delta(l_1, l_2) \delta(m_1, m_2) \delta(m_1', m_2').$$

6.4 Representación Producto

Sean dos espacios vectoriales S_1 y S_2 , que generan representaciones irreducibles λ_1 y λ_2 , de dimensiones n_1 y n_2 respectivamente, de un grupo G . Entonces, los estados de S_1 pueden expresarse en función de una base $|\lambda_1, \mu_1\rangle$, de forma que las transformaciones que representan al grupo en el espacio S_1 vienen dadas por,

$$T^{\lambda_1}(g) |\lambda_1, \mu_1\rangle = \sum_{\mu_1'} D_{\mu_1', \mu_1}^{\lambda_1}(g) |\lambda_1, \mu_1'\rangle$$

y análogamente para S_2 . El espacio vectorial producto, de dimensión $n_1 \cdot n_2$, cuya base es $|\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2\rangle$, genera una representación del grupo, denominada **representación producto** $\lambda_1 \times \lambda_2$, definida por

$$T^{\lambda_1 \times \lambda_2}(g) |\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2\rangle = \sum_{\mu_1', \mu_2'} D_{\mu_1', \mu_1}^{\lambda_1}(g) D_{\mu_2', \mu_2}^{\lambda_2}(g) |\lambda_1, \mu_1', \lambda_2, \mu_2'\rangle$$

Por tanto, la representación producto asigna a cada elemento $g \in G$ una matriz $n_1 \cdot n_2 \times n_1 \cdot n_2$, dada por

$$D_{\mu_1', \mu_2', \mu_1, \mu_2}^{\lambda_1 \times \lambda_2}(g) = D_{\mu_1', \mu_1}^{\lambda_1}(g) D_{\mu_2', \mu_2}^{\lambda_2}(g)$$

La representación $\lambda_1 \times \lambda_2$ no es, en general, irreducible. Por tanto, el espacio vectorial producto $S_1 \times S_2$ puede descomponerse en suma directa de espacios vectoriales invariantes $S_a + S_b + \dots$, que generan representaciones irreducibles del grupo $\lambda_a, \lambda_b, \dots$. Formalmente,

se escribe $\lambda_1 \times \lambda_2 = \lambda_a + \lambda_b + \dots$. Como la dimensión del espacio vectorial producto es igual a la suma de las dimensiones de los subespacios en los que se descompone, debe cumplirse $n_1 \cdot n_2 = n_a + n_b + \dots$. Esta descomposición de la representación producto es característica del grupo, y se denomina **serie de Clebsh-Gordan**.

Los estados de los subespacios invariantes S_a pueden caracterizarse por una base $|K_a \lambda_a \mu_a \rangle$, donde λ_a indica la representación irreducible, μ_a especifica el estado concreto dentro de la representación irreducible, y K_a es un índice adicional que diferencia distintos subespacios que generan la misma representación irreducible λ_a . Estos estados pueden escribirse como combinación de la base original de $S_1 \times S_2$, $|\lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \rangle$. Los **coeficientes de Clebsh-Gordan** para el grupo G nos dan la transformación entre ambas bases, $\langle K_a \lambda_a \mu_a | \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \rangle$

Ejemplo: Consideremos dos partículas que se mueven en un potencial central, con momentos angulares l_1 y l_2 . Los estados de la primera pueden desarrollarse en una base $|l_1, m_1 \rangle$, y generan una representación irreducible del grupo de las rotaciones, de dimensión $2l_1 + 1$. Lo mismo ocurre para los estados de la segunda partícula. El sistema de las dos partículas, descrito en una base $|l_1, m_1, l_2, m_2 \rangle$ genera una representación del grupo de las rotaciones, pero no es irreducible. La representación $l_1 \times l_2$ puede descomponerse como suma de representaciones irreducibles, dadas por $L = |l_1 - l_2|, \dots, (l_1 + l_2)$ (Serie de Clebsh-Gordan). En este caso, no aparecen espacios vectoriales distintos que generen la misma representación irreducible, por lo que el índice K no es necesario. La transformación de la base original a la de los subespacios que generan las representaciones irreducibles L viene dada por los coeficientes de Clebsh-Gordan habituales, $\langle LM | l_1 m_1 l_2 m_2 \rangle$.

Propiedades de los coeficientes de Clebsh-Gordan

Ortogonalidad:

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} \langle K_a \lambda_a \mu_a | \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \rangle \langle K_b \lambda_b \mu_b | \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \rangle^* = \delta(K_a, K_b) \delta(\lambda_a, \lambda_b) \delta(\mu_a, \mu_b)$$

$$\sum_{K, \lambda, \mu} \langle K \lambda \mu | \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \rangle \langle K \lambda \mu | \lambda_1 \mu'_1 \lambda_2 \mu'_2 \rangle^* = \delta(\mu_1, \mu'_1) \delta(\mu_2, \mu'_2)$$

Relación con las matrices de las representaciones irreducibles

$$D_{\mu'_1 \mu'_2, \mu_1 \mu_2}^{\lambda_1 \times \lambda_2}(g) = \sum_{K, \lambda, \mu} \langle K \lambda \mu | \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \rangle D_{\mu', \mu}^{\lambda}(g) \langle K \lambda \mu' | \lambda_1 \mu'_1 \lambda_2 \mu'_2 \rangle^* = D_{\mu'_1, \mu_1}^{\lambda_1}(g) D_{\mu'_2, \mu_2}^{\lambda_2}(g)$$

$$\frac{1}{[G]} \sum_g D_{\mu', \mu}^{\lambda*}(g) D_{\mu'_1, \mu_1}^{\lambda_1}(g) D_{\mu'_2, \mu_2}^{\lambda_2}(g) = \frac{1}{n(\lambda)} \sum_K \langle K \lambda \mu | \lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \rangle \langle K \lambda \mu' | \lambda_1 \mu'_1 \lambda_2 \mu'_2 \rangle^*$$

6.5 Operadores tensoriales

Sea $T(g)$ una representación de un grupo G en un espacio vectorial V de dimensión n . Sea O el conjunto de todos los operadores lineales que actúan sobre V . Puede verse que O , es a su vez, un espacio vectorial de dimensión $n \cdot n$ (O es isomorfo a las matrices $n \times n$). Además, O genera una representación del grupo de dimensión $n \cdot n$, definida de tal forma que, a cada elemento del grupo g , le corresponde un operador lineal $T^O(g)$ que actúa en el espacio O de los operadores, de forma que a cada operador lineal A

le corresponde $T^O(g)(A) = T(g)AT^+(g)$. Nótese que, con esta definición, el elemento de matriz $\langle u|A|v \rangle$ entre estados de V no se modifica, si se varían tanto los estados $|u \rangle, |v \rangle$ como el operador A :

$$\langle u|A|v \rangle \rightarrow (\langle u|T^+(g))(T^O(g)(A))(T(g)|v \rangle) = \langle u|A|v \rangle$$

El espacio vectorial O genera una representación en general reducible del grupo. Por ello, puede descomponerse en subespacios vectoriales de operadores que generen representaciones irreducibles del grupo. Estos subespacios de operadores pueden describirse en términos de una base de operadores que puede expresarse como $A(k, \lambda, \mu)$, de forma que

$$T^O(g)(A(k, \lambda, \mu)) = T(g)A(k, \lambda, \mu)T^+(g) = \sum_{\mu'} D_{\mu', \mu}^{\lambda}(g)A(k, \lambda, \mu')$$

Los operadores que cumplen esta relación se denominan **operadores tensoriales**. Cualquier operador $A \in O$ puede desarrollarse como combinación lineal de operadores tensoriales.

Teorema de Wigner-Eckart: El elemento de matriz de un operador tensorial $A(k, \lambda, \mu)$ entre estados que generen representaciones irreducibles de un grupo $|k_1, \lambda_1, \mu_1 \rangle, |k_2, \lambda_2, \mu_2 \rangle$ viene dado por:

$$\langle k_2, \lambda_2, \mu_2 | A(k, \lambda, \mu) | k_1, \lambda_1, \mu_1 \rangle = \sum_K \langle K \lambda_2 \mu_2 | \lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1 \rangle \langle k_2, \lambda_2, K || A(k, \lambda) || k_1, \lambda_1 \rangle$$

donde el elemento de matriz reducido $\langle k_2, \lambda_2, K || A(k, \lambda) || k_1, \lambda_1 \rangle$ es independiente de μ, μ_1, μ_2 . Por ello, toda la dependencia del elemento de matriz en los estados concretos que se consideran dentro de la representación irreducible aparecen en el coeficiente de Clebsh-Gordan. La forma explícita del elemento de matriz reducido es:

$$\begin{aligned} & \langle k_2, \lambda_2, K || A(k, \lambda) || k_1, \lambda_1 \rangle = \\ & \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu} \langle k_2, \lambda_2, \mu_2 | A(k, \lambda, \mu) | k_1, \lambda_1, \mu_1 \rangle \langle K \lambda_2 \mu_2 | \lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1 \rangle / n(\lambda_2) \end{aligned}$$

Esta expresión puede demostrarse a partir de la invariancia de $\langle u|A|v \rangle$, y de la relación de las representaciones irreducibles con los coeficientes de Clebsh-Gordan.

Corolario: Si un operador es invariante frente a las transformaciones de un grupo, sus elementos de matriz entre estados que generan representaciones irreducibles diferentes se anulan, mientras que sus elementos de matriz entre estados que generan la misma representación irreducible son iguales.

Demostración: Si A es invariante, entonces $T(g)AT^+(g) = A$. Por tanto, A genera un subespacio invariante de dimensión 1, en el que $D(g) = 1$, lo que corresponde a la representación trivial. Al único estado de la representación trivial lo representaremos por $|\lambda = 0, \mu = 0 \rangle$. El producto de la representación trivial por una representación irreducible λ es la misma representación λ . Por tanto, la serie de Clebsh-Gordan es $\lambda \times 0 = \lambda$, y los coeficientes de Clebsh-Gordan cumplen

$$\langle \lambda' \mu' | 00; \lambda \mu \rangle = \delta(\lambda', \lambda) \delta(\mu', \mu)$$

El índice K no es necesario ya que no hay representaciones repetidas. Utilizando el teorema de Wigner-Eckart, resulta

$$\langle k_2, \lambda_2, \mu_2 | A(k, 0, 0) | k_1, \lambda_1, \mu_1 \rangle = \delta(\lambda_2, \lambda_1) \delta(\mu_2, \mu_1) \langle k_2, \lambda_2 || A(k, 0) || k_1, \lambda_1 \rangle$$

Aplicación a la mecánica cuántica: Si el hamiltoniano de un sistema es invariante frente a las transformaciones lineales que representan a un grupo G , entonces:

(1) Los índices que caracterizan las representaciones irreducibles del grupo λ pueden utilizarse como buenos números cuánticos para etiquetar los autoestados del hamiltoniano.

(2) Todos los estados μ que generan una representación irreducible determinada λ están degenerados.

6.6 Ejemplos de grupos discretos

Vamos a considerar los grupos simétricos $S(2)$, $S(3)$ y, en general, $S(n)$. Estos grupos tienen una especial relevancia ya que cualquier grupo finito es isomorfo a un subgrupo de $S(n)$. Partiremos de representaciones reducibles del grupo que descompondremos explícitamente en representaciones irreducibles.

6.6.1 Grupo $S(2)$

Es el grupo de las permutaciones de dos elementos. En notación de ciclos, $G = \{e, (12)\}$. Es un grupo abeliano, isomorfo a todos los grupos de dos elementos.

Una representación del grupo puede conseguirse con el espacio vectorial de dimensión 2 generado por los estados $\{|ab\rangle, |ba\rangle\}$, de forma que a los elementos $e, (12)$ del grupo le corresponden la transformaciones $T[e], T[(12)]$, definidas por

$$T[e]|ab\rangle = |ab\rangle, \quad T[e]|ba\rangle = |ba\rangle, \quad T[(12)]|ab\rangle = |ba\rangle, \quad T[(12)]|ba\rangle = |ab\rangle$$

En notación matricial, se cumple

$$D[e] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D[(12)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Esta representación no es irreducible. Los subespacios que generan representaciones irreducibles se obtienen actuando sobre el espacio vectorial $|ab\rangle, |ba\rangle$ con el operador simetrizador S_{12} o en antisimetrizador A_{12} . Los subespacios que se obtienen, de dimensión 1, están generados por los estados $|S\rangle = (|ab\rangle + |ba\rangle)/\sqrt{2}$ y $|A\rangle = (|ab\rangle - |ba\rangle)/\sqrt{2}$ respectivamente, y cumplen:

$$T[e]|S\rangle = |S\rangle, \quad T[e]|A\rangle = |A\rangle, \quad T[(12)]|S\rangle = |S\rangle, \quad T[(12)]|A\rangle = -|A\rangle$$

En notación matricial,

$$D^S[e] = 1, \quad D^S[(12)] = 1; \quad D^A[e] = 1, \quad D^A[(12)] = -1.$$

Estas dos representaciones son las únicas representaciones irreducibles de $S(2)$. A partir de su origen pueden etiquetarse por el diagrama de Young que corresponde a los operadores S_{12} y A_{12} , que son, respectivamente, $[2]$ y $[1, 1]$. Nótese que la representación S , o $[2]$, es la representación trivial.

6.6.2 Grupo S(3)

Es el grupo de las permutaciones de tres elementos. En notación de ciclos,

$$G = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

. Es un grupo no abeliano, pues $(12)(13) = (132)$, y $(13)(12) = (123)$, y es isomorfo al grupo D_3 .

Una representación del grupo puede conseguirse con el espacio vectorial de dimensión 6 generado por los estados $\{|abc\rangle, |bac\rangle, |acb\rangle, |bca\rangle, |cab\rangle, |cba\rangle\}$, de forma que a los elementos $(12), (13)$ del grupo le corresponden las transformaciones $T[(12)], T[(13)]$, definidas por

$$T[(12)]|abc\rangle = |bac\rangle, \quad T[(13)]|abc\rangle = |cba\rangle$$

El resto de las transformaciones se obtienen del homomorfismo. Por ejemplo, $T[(132)] = T[(12)]T[(13)]$. En notación matricial, se cumple

$$D[(12)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D[(13)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Esta representación es reducible. Los subespacios que generan representaciones irreducibles se obtienen de la forma siguiente:

Actuemos sobre el estado $|abc\rangle$ con el operador simetrizador S_{123} . Se obtiene el estado:

$$|S\rangle = S_{123}|abc\rangle = (|abc\rangle + |bac\rangle + |acb\rangle + |bca\rangle + |cab\rangle + |cba\rangle)/\sqrt{6}$$

que cumple

$$T[(12)]|S\rangle = |S\rangle, \quad T[(13)]|S\rangle = |S\rangle.$$

A partir de estas expresiones, usando el homomorfismo es claro que, para todos los elementos del grupo $S(3)$, $T[g]|S\rangle = |S\rangle$. El estado $|S\rangle$ genera una representación irreducible del grupo de dimensión uno que corresponde a la representación trivial. Esta representación se denomina “totalmente simétrica” (S).

Actuemos sobre el estado $|abc\rangle$ con el operador antisimetrizador A_{123} . Se obtiene el estado:

$$|A\rangle = A_{123}|abc\rangle = (|abc\rangle - |bac\rangle - |acb\rangle + |bca\rangle + |cab\rangle - |cba\rangle)/\sqrt{6}$$

que cumple

$$T[(12)]|A\rangle = -|A\rangle, \quad T[(13)]|A\rangle = -|A\rangle$$

. El estado $|A\rangle$ genera una representación irreducible del grupo de dimensión uno diferente a la representación trivial. Esta representación se denomina “totalmente anti-simétrica” (A).

Actuemos sobre el estado $|abc\rangle$ con el operador $A_{12}S_{13}$. Se obtiene el estado:

$$|M2\rangle = A_{12}S_{13}|abc\rangle = (|abc\rangle + |cba\rangle - |bac\rangle - |bca\rangle)/\sqrt{4}$$

que cumple

$$T[(12)]|M2 \rangle = -|M2 \rangle, \quad T[(13)]|M2 \rangle = 1/2|M2 \rangle + \sqrt{3/4}|M1 \rangle$$

donde

$$|M1 \rangle = (|abc \rangle + |cba \rangle + |bac \rangle + |bca \rangle - 2|cab \rangle - 2|acb \rangle) / \sqrt{12}$$

Los estados $\{|M1 \rangle, |M2 \rangle\}$ generan una representación irreducible del grupo de dimensión dos. Esta representación se denomina “de simetría mixta” (M). En notación matricial,

$$D^M[(12)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^M[(13)] = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/4} \\ \sqrt{3/4} & 1/2 \end{pmatrix}$$

Actuemos sobre el estado $|abc \rangle$ con el operador $A_{13}S_{12}$, y ortogonalicemos el resultado con respecto a $|M1 \rangle$ y $|M2 \rangle$. Se obtiene el estado:

$$|M'2 \rangle = (2|abc \rangle + |acb \rangle - |bca \rangle + |bac \rangle - |cab \rangle - 2|cba \rangle) / \sqrt{12}$$

que cumple

$$T[(13)]|M'2 \rangle = -|M'2 \rangle, \quad T[(12)]|M'2 \rangle = 1/2|M'2 \rangle + \sqrt{3/4}|M'1 \rangle$$

donde

$$|M'1 \rangle = (-|acb \rangle - |bca \rangle + |bac \rangle + |cab \rangle) / \sqrt{4}$$

Los estados $\{|M'1 \rangle, |M'2 \rangle\}$ generan una representación irreducible del grupo de dimensión dos. En notación matricial,

$$D^{M'}[(13)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^{M'}[(12)] = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/4} \\ \sqrt{3/4} & 1/2 \end{pmatrix}$$

Puede verse que esta representación es equivalente a la anterior. Por tanto también corresponde a la “de simetría mixta” (M). Vemos que nuestro espacio vectorial original, de dimensión 6, puede descomponerse como suma directa de espacios vectoriales de dimensión 1, 1, 2 y 2, generados respectivamente por los estados $|S \rangle$, $|A \rangle$, $(|M1 \rangle, |M2 \rangle)$ y $(|M'1 \rangle, |M'2 \rangle)$. Estos espacios vectoriales generan las representaciones irreducibles S , A , M y M . La representación M , por tanto, aparece dos veces. Las representaciones S , A y M son las únicas representaciones irreducibles de $S(3)$. A partir de su origen pueden etiquetarse por el diagrama de Young que corresponde a los operadores correspondientes, de forma que la representación totalmente simétrica S corresponde a $[3]$, la representación totalmente antisimétrica corresponde a $[1, 1, 1]$, y la representación de simetría mixta M , corresponde a $[2, 1]$.

6.6.3 Grupo $S(n)$

Es el grupo de las permutaciones de n elementos. Una representación del grupo puede conseguirse con el espacio vectorial de dimensión $n!$ generado por el estado $|abc\dots n \rangle$, y todas sus permutaciones.

Esta representación es reducible. Los subespacios que generan representaciones irreducibles se obtienen actuando sobre el espacio vectorial con los operadores de Young, que se construyen de la forma siguiente:

1) Se toman todos los diagramas de Young de n cuadros, $[Y] = [m_1, m_2, \dots, m_a]$, tales que $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_a$, y $n = m_1 + m_2 + \dots + m_a$. A cada diagrama de Young le va a corresponder una representación irreducible diferente. La dimensión de la representación irreducible coincide con el número de tableros de Young que corresponden al diagrama.

2) Para cada diagrama de Young $[Y]$, se constuyen todos los tableros de Young $T(Y, K), K = 1, N(Y)$, que se obtienen numerando de forma estándar los cuadros de 1 a n , de manera que los índices aumenten hacia la derecha y hacia abajo. K etiqueta cada numeración estándar. $N(Y)$ es el número de tableros de Young que corresponden a cada operador de Young. Para cada tablero de Young, se obtiene el operador de Young $O(Y, m)$, que simetriza con respecto a los índices de cada fila y antisimetriza con respecto a los índices de cada columna.

2) Se proyecta el estado $|abc\dots n\rangle$, con el primer operador de Young $O(Y, K = 1)$. Con ello, se obtiene un estado $|Y, K = 1, j = 1\rangle$ de la base de la representación irreducible. Se operan con las transformaciones del grupo sobre este estado, y se generan el resto de los estados $|Y, K = 1, j\rangle$ que generan la representación irreducible. El número de estos estados es $N(Y)$.

3) Se proyecta el estado $|abc\dots n\rangle$, con los siguientes operadores de Young $O(Y, K)$, ortogonalizando con respecto a los estados previamente obtenidos. Con ello, se obtiene un estado $|Y, K, j = 1\rangle$ de la base de la representación irreducible. Se operan con las transformaciones del grupo sobre este estado, y se generan el resto de los estados $|Y, K, j\rangle$ que generan la representación irreducible. La representación obtenida es equivalente a la de $K = 1$.

Por tanto, vemos que la representación original, de dimensión $n!$, se descompone en suma de representaciones irreducibles. Para cada diagrama de Young $[Y]$, aparece una representación de dimensión $N(Y)$, que se ve repetida tantas veces como tableros de Young hay, es decir, $N(Y)$ veces. Por tanto, si contamos el número total de estados, se tiene que $n! = \sum_Y N(Y)^2$.

Relación con la estadística cuántica

En mecánica cuántica, un sistema de n fermiones debe tener una función de onda antisimétrica frente al intercambio de partículas. Por tanto, dicha función de onda corresponde a la representación $[1, 1, \dots, 1]$ del grupo de las permutaciones. Del mismo modo, un sistema de n bosones debe tener una función de onda totalmente simétrica, que corresponde a la representación $[n]$. Cuando la función de onda de las partículas se expresa como producto de funciones de onda de distintas variables, por ejemplo, orbitales y de espín, para el caso de fermiones, la función de onda orbital y la función de onda de espín pertenecen, en general, a representaciones diferentes del grupo de las permutaciones, $[Y_o]$ e $[Y_s]$. No obstante, la representación producto $[Y_o] \times [Y_s]$ debe contener a la representación $[1, 1, \dots, 1]$. Ello implica en este caso que $[Y_o]$ se obtiene de $[Y_s]$ cambiando filas por columnas. Pon ejemplo, para 4 electrones en una capa (n, l) , si la función de onda de espín pertenece a la representación irreducible del grupo de las permutaciones $[3, 1]$, que corresponde a $S = 1$, la función de onda orbital pertenece a la representación $[2, 1, 1]$, mientras que la función de onda total pertenece a la representación $[1, 1, 1, 1]$. En el caso de bosones, la representación producto $[Y_o] \times [Y_s]$ debe contener a la representación $[n]$. Ello implica que $[Y_o] = [Y_s]$.

6.7 Problemas

1) El grupo $S(3)$ puede expresarse, en notación de ciclos, como

$$G = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Obtener la tabla de multiplicar del grupo. Obtener los subgrupos. ¿ Puede obtenerse $S(3)$ como producto de dos de sus subgrupos?

2) Demostrar que los conjuntos de matrices siguientes constituyen una representación del grupo. (Nota: basta demostrar que se cumplen las expresiones matriciales correspondientes a $(12)(12) = e$, $(13)(13) = e$, $(12)(13) = (132)$, $(13)(12) = (123)$, $(13)(132) = (23)$ y $(12)(123) = (23)$. Todas las demas expresiones de la tabla de multiplicar se derivan de éstas).

a) Representación simétrica [3]:

$$D[e] = 1; D[(12)] = 1; D[(13)] = 1; D[(23)] = 1; D[(123)] = 1; D[(132)] = 1$$

b) Representación antisimétrica [1,1,1]:

$$D[e] = 1; D[(12)] = -1; D[(13)] = -1; D[(23)] = -1; D[(123)] = 1; D[(132)] = 1$$

c) Representación de simetría mixta [2,1]:

$$\begin{aligned} D[e] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & D[(12)] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ D[(13)] &= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/4} \\ \sqrt{3/4} & 1/2 \end{pmatrix}, & D[(23)] &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/4} \\ -\sqrt{3/4} & 1/2 \end{pmatrix}, \\ D[(123)] &= \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3/4} \\ \sqrt{3/4} & -1/2 \end{pmatrix}, & D[(132)] &= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3/4} \\ -\sqrt{3/4} & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) Obtener las representaciones producto $[3] \times [3]$, $[3] \times [1, 1, 1]$, $[3] \times [2, 1]$, $[1, 1, 1] \times [1, 1, 1]$, $[1, 1, 1] \times [2, 1]$. Encontrar a qué representaciones son equivalentes.

4) Obtener la representación producto $[2, 1] \times [2, 1]$ para los elementos (12) y (23) del grupo. Transformar la base $|ij\rangle$ de la representación producto a una nueva base dada por $|S\rangle = (|11\rangle + |22\rangle)/\sqrt{2}$, $|A\rangle = (|12\rangle - |21\rangle)/\sqrt{2}$, $|M1\rangle = (|11\rangle - |22\rangle)/\sqrt{2}$, $|M2\rangle = (|12\rangle + |21\rangle)/\sqrt{2}$, y obtener la representación de los elementos del grupo en la nueva base. Deducir la serie de Clebsh-Gordan y los coeficientes de Clebsh-Gordan para la representación $[2, 1] \times [2, 1]$.

5) Demostrar el teorema de Wigner-Eckart.

6) Encontrar las representaciones irreducibles de $S(4)$ que existen, a partir de los diagramas de Young. Obtener la dimensión de cada representación irreducible evaluando los tableros de Young para cada diagrama. Comprobar que se cumple $n! = \sum_Y N(Y)^2$.

Chapter 7

Grupos de Lie

Son grupos continuos, caracterizados por un conjunto de r parámetros reales $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_r)$, que varían de forma continua en un intervalo dado, y que cumplen $g(\mathbf{a})g(\mathbf{b}) = g(\mathbf{c})$, donde \mathbf{c} puede expresarse como una función analítica de \mathbf{a} y \mathbf{b} .

El número de parámetros r es el **orden** del grupo. Si el intervalo en el que varían los parámetros es cerrado y acotado, el grupo es compacto.

Representaciones: A cada elemento del grupo $g(\mathbf{a})$ se le asigna una matriz $D_{ij}(\mathbf{a})$ tal que si $g(\mathbf{a})g(\mathbf{b}) = g(\mathbf{c})$,

$$\sum_j D_{ij}(\mathbf{a})D_{jk}(\mathbf{b}) = D_{ik}(\mathbf{c}),$$

o bien, en un espacio vectorial V , se le asigna una transformación lineal $T(\mathbf{a})$ tal que $T(\mathbf{a})T(\mathbf{b}) = T(\mathbf{c})$.

Los parámetros que definen un grupo pueden tomarse de forma que, para $\mathbf{a} = \mathbf{0} = (0 \dots 0)$, $g(\mathbf{0}) = e$ (elemento neutro). Entonces, $D_{ij}(\mathbf{0}) = \delta_{ij}$, y $T(\mathbf{0}) = I^V$ (operador identidad en V).

7.1 Generadores

Consideremos los elementos del grupo correspondientes a parámetros próximos a cero $d\mathbf{a} = (da_1 \dots da_r)$. Estos elementos del grupo $g(d\mathbf{a})$ estarán próximos a la unidad. Por tanto, puede escribirse:

$$g(d\mathbf{a}) = e + i \sum_{\mu=1}^r da_{\mu} X_{\mu}$$

Los objetos X_{μ} , que en un sentido amplio corresponden a las “derivadas” de los elementos del grupo con respecto a los parámetros, son los **generadores** del grupo. Estos objetos no son elementos del grupo, pero describen las transformaciones correspondientes a parámetros pequeños. En una representación del grupo, los generadores vienen caracterizados por matrices $(X_{\mu})_{ij}$ dadas por

$$D_{ij}(d\mathbf{a}) = \delta_{ij} + i \sum_{\mu=1}^r da_{\mu} (X_{\mu})_{ij},$$

o bien por operadores lineales X_μ^V en el espacio vectorial V

$$T(d\mathbf{a}) = I^V + i \sum_{\mu=1}^r da_\mu X_\mu^V$$

Teorema: Si la representación del grupo es unitaria, los generadores vienen caracterizados por matrices o transformaciones lineales hermíticas.

Demostración: El inverso de $g(d\mathbf{a})$ es $g(-d\mathbf{a})$. Por tanto, $D_{ij}^{-1}(d\mathbf{a}) = D_{ij}(-d\mathbf{a})$. Pero si la representación es unitaria, $D_{ij}^{-1}(d\mathbf{a}) = D_{ji}^*(d\mathbf{a})$. A partir de ésto se llega a que $(X_\mu)_{ij} = (X_\mu)_{ji}^*$.

Teorema: Si un operador lineal H definido en un espacio vectorial V es invariante frente a las transformaciones en V que representan a un grupo G , entonces el operador H conmuta con todos los generadores del grupo.

Demostración: La invariancia del operador implica que $T(d\mathbf{a})HT^+(d\mathbf{a}) = H$. Desarrollando esta expresión y tomando los términos en da_μ , se obtiene $[H, X_\mu^V] = 0$.

Teorema: La representación de un generador como un operador en un espacio vectorial producto $V \times W$ es igual a la suma de las representaciones del generador en V y W .

Demostración: Por definición de representación producto, $T^{V \times W}(d\mathbf{a}) = T^V(d\mathbf{a})T^W(d\mathbf{a})$. Desarrollando esta expresión en términos de los generadores, y considerando términos en da_μ , se tiene

$$X_\mu^{V \times W} = I^V X_\mu^W + X_\mu^V I^W$$

Aplicación a la mecánica cuántica: Si las transformaciones de un grupo de Lie dejan invariante el hamiltoniano de un sistema, entonces los generadores del grupo corresponden a operadores hermíticos que conmutan con el hamiltoniano, y son, por tanto, constantes del movimiento. Además, corresponden a operadores aditivos, ya que, actuando sobre sistemas compuestos, dan la suma del operador actuando sobre cada subsistema.

Teorema El conmutador de dos generadores es una combinación lineal de los generadores.

$$X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu = \sum_{\rho} C_\rho^{\mu\nu} X_\rho$$

En esta expresión, $C_\rho^{\mu\nu}$ son números complejos llamados constantes de estructura. La expresión anterior es válida para los generadores como entes abstractos. Por tanto, también será válida para cualquier representación de los generadores, como matrices o como operadores lineales.

Álgebra de Lie: El espacio vectorial de dimensión r obtenido de todas las combinaciones lineales de los generadores del grupo, junto con la operación interna definida por el conmutador, forma una estructura denominada **álgebra de Lie**. A cada grupo de Lie le corresponde un álgebra de Lie. Un subespacio vectorial de un álgebra de Lie que cumpla que el conmutador de dos operadores cualesquiera del subespacio, pertenece al mismo subespacio, forma un sub-álgebra, y se dice que cierra ante conmutación.

Si el álgebra de Lie de dimensión r de un grupo de orden r contiene un sub-álgebra de dimensión s , entonces con s generadores independientes contenidos en el sub-álgebra puede generarse un subgrupo del grupo original de orden s .

Si el álgebra de Lie de dimensión r de un grupo puede expresarse como suma directa de dos sub-álgebras de dimensiones s y $r - s$, tales que los operadores de las dos sub-álgebras conmutan entre sí, entonces el grupo puede expresarse como producto directo de los dos subgrupos de orden s y $r - s$, generados a partir de las sub-álgebras.

7.2 Grupo U(1)

Definición: Es el grupo de las transformaciones que son isomorfas a las matrices unitarias de dimensión 1. $g(\phi) \simeq \exp(i\phi)$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Es un grupo compacto de orden 1.

Generadores: Para valores de ϕ pequeñas, $g(\phi) = e + iX\phi$. X es el generador.

Representación fundamental: Es la que se infiere de la definición del grupo. $D^f(\phi) = \exp(i\phi)$. En esta representación, $X = 1$.

Representación conjugada: $D^c(\phi) = \exp(-i\phi)$. En esta representación, $X = -1$.

Otras representaciones: Se obtienen a partir de productos de la representación fundamental y de su conjugada. En general, pueden expresarse $D^{(m)}(\phi) = \exp(im\phi)$, donde m es un entero. En esta representación, $X = m$. Todas las representaciones irreducibles son de dimensión 1.

Producto de representaciones: El producto de las representaciones (m_1) y (m_2) es la representación $(m_1 + m_2)$, ya que $D^{(m_1)}(\phi)D^{(m_2)}(\phi) = D^{(m_1+m_2)}(\phi)$.

Ejemplo: El grupo $U(1)$ describe las transformaciones asociadas a la conservación de números cuánticos aditivos enteros. Por ejemplo, la conservación de la carga eléctrica se obtiene a partir de la invariancia del sistema frente al grupo de transformaciones $T(\phi) = \exp(iQ/e\phi)$. Los autoestados del sistema corresponden a estados que generan representaciones irreducibles del grupo, que corresponden a valores enteros del generador Q/e . Si tenemos un sistema con carga q_1 (autoestado del operador Q/e correspondiente al autovalor q_1 , que genera la representación irreducible (q_1)), y otro sistema con carga q_2 , el sistema compuesto tiene carga $q_1 + q_2$, ya que es autoestado de Q/e correspondiente a ese autovalor, y genera la representación irreducible $(q_1 + q_2)$.

La conservación de la carga en reacciones entre partículas puede verse como consecuencia del corolario del teorema de Wigner-Eckart, a partir del hecho de que $T(\phi)HT^+(\phi) = H$. En la reacción $A + B \rightarrow C + D$

$$\langle AB|H|CD \rangle = \langle (q_A + q_B)||H||(q_C + q_D) \rangle \delta(q_A + q_B, q_C + q_D)$$

7.3 Grupo U(2)

Definición: Es el grupo de las transformaciones que son isomorfas a las matrices unitarias de dimensión 2. Es un grupo compacto de orden 4.

Generadores: Para valores de ϕ_i pequeñas, $g(\phi_i, i = 0, 3) = e + i \sum_{i=0}^3 X_i \phi_i$. X_i son los generadores, que son operadores abstractos que satisfacen las reglas de conmutación que veremos posteriormente.

Representación fundamental: Es la que se infiere de la definición del grupo, consistente en matrices unitarias de dimensión 2. Las matrices cercanas a la unidad pueden

expresarse en función de una matriz \mathbf{a} , de dimensión 2 y elementos infinitesimales,

$$D^f(\mathbf{a}) = I^{(2)} + i\mathbf{a}$$

Considerando que las transformaciones son unitarias, se llega a que \mathbf{a} es hermítica. Por tanto, puede escribirse como combinación de la matriz unidad y las matrices de Pauli. Por tanto,

$$D^f(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = I^{(2)} + i(\phi_0 I^{(2)} + \phi_1 \sigma_1 + \phi_2 \sigma_2 + \phi_3 \sigma_3)$$

Reglas de conmutación De lo anterior se deduce que los generadores de $U(2)$, en la representación fundamental, vienen caracterizados por la matriz unidad en dos dimensiones, mas las tres matrices de Pauli. En general, los generadores X_0, X_1, X_2, X_3 satisfacen las mismas reglas de conmutación que $I^{(2)}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Como la matriz unidad conmuta con todas las demás, y las matrices de Pauli cierran ante conmutación, el álgebra de $U(2)$ puede expresarse como suma directa de dos subálgebras, una generada por X_0 , y otra por X_1, X_2, X_3 . El grupo $U(2)$ se puede expresar como el producto directo de los grupos asociados a las subálgebras, que son $U(1)$ y $SU(2)$. Por tanto, $U(2) = U(1) \times SU(2)$

7.4 Grupo $SU(2)$

Definición: Es el grupo de las transformaciones que son isomorfas a las matrices unitarias con determinante 1 de dimensión 2. Es un grupo compacto de orden 3.

Generadores: Para valores de ϕ_i pequeñas, $g(\phi_i, i = 1, 3) = e + i \sum_{i=1}^3 X_i \phi_i$. X_i son los generadores, que son operadores abstractos que satisfacen las reglas de conmutación que veremos posteriormente.

Representación fundamental: La condición de que el determinante de $D^f(\mathbf{a})$ sea 1 hace que $Tr(\mathbf{a}) = 0$. Por tanto, la representación fundamental de las transformaciones infinitesimales del grupo $SU(2)$ puede expresarse por

$$D^f(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = I^{(2)} + i(\phi_1 \sigma_1 + \phi_2 \sigma_2 + \phi_3 \sigma_3)$$

Reglas de conmutación: De lo anterior se deduce que los generadores de $SU(2)$, en la representación fundamental, vienen caracterizados por las tres matrices de Pauli. Las matrices de Pauli cumplen $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$, con todas las permutaciones circulares de índices. En general, los generadores X_1, X_2, X_3 satisfacen las mismas reglas de conmutación que $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Si se redefinen los generadores como $\mathbf{I}_i = X_i/2$, las relaciones de conmutación resultan $[\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2] = i\mathbf{I}_3$, que corresponden a las de un momento angular. El álgebra del grupo $SU(2)$ es isomorfa al álgebra del grupo de las rotaciones. Por tanto, las representaciones irreducibles, series de Clebsh-Gordan, y coeficientes de Clebsh-Gordan de ambos grupos son equivalentes.

Representaciones irreducibles: La representación fundamental tiene dimensión 2, y en ella los generadores vienen caracterizados por las matrices de Pauli. Los estados base de esta representación pueden caracterizarse por $|F, i\rangle$, donde F caracteriza la representación fundamental, e i va de 1 a 2. En esa base, los elementos de matriz de los generadores del grupo vienen dados por

$$\langle F, i' | X_a | F, i \rangle = (\sigma_a)_{i'i}$$

Las demás representaciones irreducibles se obtienen realizando el producto de la representación fundamental por sí misma, y actuando con los operadores de Young relevantes.

Vienen caracterizadas por el autovalor de $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2$, que es $I(I+1)$. La dimensión de la representación es $2I + 1$. $I = 0$ corresponde a la representación trivial. $I = 1/2$ corresponde a la representación fundamental. La representación conjugada a la representación fundamental es equivalente a la representación fundamental.

Para caracterizar los estados dentro de la representación irreducible, pueden tomarse autoestados de I_3 , caracterizados por su autovalor M . Por tanto, los estados que pertenecen a un subespacio que genera una representación irreducible pueden etiquetarse por $|IM\rangle$, donde I indica la representación irreducible y M especifica el estado concreto.

Producto de representaciones: El producto de dos representaciones $I_1 \times I_2$ se descompone en suma de representaciones irreducibles, dadas por $|I_1 - I_2| + \dots + (I_1 + I_2)$. Los estados producto se expresan en función de los estados que generan representaciones irreducibles mediante los coeficientes de Clebsh-Gordan habituales:

$$|I_1 M_1; I_2 M_2\rangle = \sum_{I, M} \langle IM | I_1 M_1, I_2 M_2 \rangle |(I_1 I_2) IM\rangle$$

Ejemplo: El grupo $SU(2)$ describe las transformaciones entre partículas de un multiplete de isospín.

$$T(a_1, a_2, a_3) = I + i(a_1 \mathbf{I}_1 + a_2 \mathbf{I}_2 + a_3 \mathbf{I}_3)$$

Representaciones irreducibles: $|\Lambda\rangle : I = 0$. $|p\rangle, |n\rangle : I = 1/2 \dots$

Sistemas compuestos de dos hadrones A y B pertenecientes a multipletes α y β :

$$|AB\rangle = |\alpha I_A M_A\rangle |\beta I_B M_B\rangle = \sum_{I, M} \langle IM | I_A M_A, I_B M_B \rangle |(\alpha\beta) IM\rangle$$

Si $[H, \mathbf{I}_i] = 0$, $T(a_1, a_2, a_3) H T^\dagger(a_1, a_2, a_3) = H$,

Degeneración: La masa de todos los hadrones pertenecientes a un multiplete son iguales.

$$m(A) = \langle A | H | A \rangle = \langle \alpha I_A M_A | H | \alpha I_A M_A \rangle = \langle \alpha I_A || H || \alpha I_A \rangle$$

Probabilidades de decaimiento:

$$\langle C | H | AB \rangle = \langle I_C M_C | I_A M_A, I_B M_B \rangle \langle \gamma I_C || H || (\alpha\beta) I_C \rangle$$

7.5 Grupo SU(3)

Definición: Es el grupo de las transformaciones que son isomorfas a las matrices unitarias con determinante 1 de dimensión 3.

Generadores: Para valores de ϕ_i pequeñas, $g(\phi_i, i = 1, 8) = e + i \sum_{i=1}^8 X_i \phi_i$. X_i son los generadores, que son operadores abstractos que satisfacen las reglas de conmutación que veremos posteriormente.

Representación fundamental: Es la que se infiere de la definición del grupo, consistente en matrices unitarias con determinante 1 de dimensión 3. Las matrices cercanas a la unidad pueden expresarse en función de una matriz infinitesimal \mathbf{a} , de dimensión 3,

$$D^f(\mathbf{a}) = I^{(3)} + i\mathbf{a}$$

Considerando que las matrices D^f son unitarias y con determinante 1, se llega a que \mathbf{a} es hermítica y con traza nula. Por tanto, puede escribirse como combinación de ocho

matrices hermíticas de traza nula, y linealmente independientes. Para ello, se toman las matrices de Gell-Mann, definidas como:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por tanto, puede escribirse, para transformaciones pequeñas caracterizadas por los parámetros ϕ_i ,

$$D^f(\phi_i, i = 1, 8) = I^{(3)} + i \left(\sum_{i=1}^8 \phi_i \lambda_i \right)$$

Las matrices de Gell-Mann se caracterizan porque $Tr(\lambda_i) = 0$ y $Tr(\lambda_i^2) = 2$.

Reglas de conmutación: De lo anterior se deduce que los generadores de $SU(3)$, en la representación fundamental, vienen caracterizados por las ocho matrices de Gell-Mann. Las matrices de Gell-Mann cumplen $[\lambda_a, \lambda_b] = 2i \sum_c f_{abc} \lambda_c$. Los valores de f_{abc} son las constantes de estructura del grupo $SU(3)$. Los generadores abstractos X_i satisfacen unas relaciones de conmutación dadas por $[X_a, X_b] = 2i \sum_c f_{abc} X_c$.

Subgrupos: X_1, X_2 y X_3 cierran ante conmutación. Generan un subgrupo $SU(2)$ del grupo $SU(3)$. Además, X_8 conmuta con X_1, X_2 y X_3 . Por tanto, estos cuatro generadores generan un grupo $U(2)$, o $SU(2) \times U(1)$.

7.5.1 Representaciones irreducibles de $SU(3)$

La representación fundamental tiene dimensión 3, y en ella los generadores vienen caracterizados por las matrices de Gell-Mann. Los estados base de esta representación pueden caracterizarse por $|F, i\rangle$, donde F caracteriza la representación fundamental, e i va de 1 a 3. En esa base, los elementos de matriz de los generadores del grupo vienen dados por

$$\langle F, i' | X_a | F, i \rangle = (\lambda_a)_{i'i}$$

Si hacemos el producto de la representación fundamental por sí misma, obtenemos una representación de dimensión 9, cuyos estados base pueden escribirse como $|F^2, ij\rangle$. En ella, los generadores vienen descritos por las matrices:

$$\langle F^2, i'j' | X_a | F^2, ij \rangle = (\lambda_a)_{i'i} \delta_{j'j} + \delta_{i'i} (\lambda_a)_{j'j}$$

Esta representación es reducible. Para obtener las representaciones irreducibles, actuamos sobre el espacio vectorial generado por $|F^2, ij\rangle$ con el simetrizador S_{12} y el antisimetrizador A_{12} , con respecto a los índices i, j . De esta forma, el espacio vectorial de dimensión 9 se descompone en suma directa de un espacio vectorial de dimensión 6, descrito por los estados base $|F^2, ii\rangle$ y $|F^2, ij\rangle + |F^2, ji\rangle, i \neq j$, y otro espacio vectorial de dimensión 3, descrito por $|F^2, ij\rangle - |F^2, ji\rangle, i \neq j$.

En general, si hacemos el producto de la representación fundamental por sí misma n veces, obtenemos una representación de dimensión 3^n , cuyos estados base pueden escribirse como $|F^n, i_1 \dots i_n \rangle$. Esta representación es reducible. Para obtener las representaciones irreducibles actuamos sobre el espacio vectorial producto con los operadores de Young asociados a diagramas de Young con n cuadros. Estos operadores simetrizan o antisimetrizan los índices, proyectando sobre estados con una simetría determinada. De esta forma, se obtienen los subespacios vectoriales que generan las representaciones irreducibles. Los subespacios vectoriales que corresponden a operadores de Young que provienen del mismo diagrama de Young dan representaciones irreducibles equivalentes. Por tanto, las representaciones irreducibles de $SU(3)$ que pueden caracterizarse por el diagrama de Young $[Y]$. Así, la representación fundamental corresponde al diagrama $[1]$. La representación simétrica descrita anteriormente corresponde a $[2]$, y la representación anti-simétrica a $[1, 1]$.

Un estado invariante frente a las transformaciones del grupo genera la representación trivial. El diagrama $[1, 1, 1]$ lleva asociado el antisimetrizador A_{123} . Actuando sobre cualquier estado producto $|F^3, ijk \rangle$ genera el estado $|A \rangle = \sum_{ijk} e_{ijk} |F^3, ijk \rangle$. Este estado es invariante frente a las transformaciones del grupo, y genera la representación trivial.

Demostración: A cada elemento del grupo g le corresponde un operador $U(g)$ que actúa sobre los estados de la representación fundamental de forma que:

$$U(g)|F, i \rangle = \sum_{i'} U_{i'i}(g)|F, i' \rangle$$

Por tanto, sobre el estado $|A \rangle$ actúa de forma que

$$U(g)|A \rangle = \sum_{i'j'k'} \sum_{ijk} e_{ijk} U_{i'i}(g) U_{j'j}(g) U_{k'k}(g) |F^3, i'j'k' \rangle$$

Si embargo, la expresión en corchetes es simplemente $Det(U(g))e_{i'j'k'}$, y como $Det(U(g)) = 1$, por la definición del grupo, se tiene que $U(g)|A \rangle = |A \rangle$, por lo que la representación $[1, 1, 1]$ corresponde a la representación trivial.

No todos los diagramas de Young de n cuadros generan representaciones irreducibles de $SU(3)$. Los índices $i_1 \dots i_n$ del estado producto toman valores de 1 a 3. Por tanto, si el operador de Young contiene un antisimetrizador con respecto a más de tres índices, su acción sobre el estado producto lo anula. Por ello, sólo deben considerarse los diagramas de Young con tres filas como máximo. La dimensión de la representación irreducible de $SU(3)$ correspondiente a un diagrama de Young determinado puede obtenerse viendo los posibles formas en las que los cuadros del tablero pueden numerarse con los números 1, 2 y 3 de forma que los números sean mayores o iguales conforme se avanza en cada fila, y sean estrictamente mayores conforme se avanza en cada columna. Este criterio simplemente cuenta los estados del estado producto que dan resultados diferentes tras ser proyectados con el operador de Young. Con este criterio, se obtiene $d([1, 1, 1]) = 1$, $d([2, 1]) = 8$, $d([3]) = 10$.

7.5.2 Caracterización de los estados. Diagramas de pesos.

De la misma forma que en el grupo $SU(2)$ se caracterizan los estados de una representación irreducible de forma que sean autoestados del generados I_3 , en el grupo $SU(3)$ puede hacerse lo propio. Los generadores X_3 y X_8 conmutan entre sí, por tanto ambos pueden

tomarse para caracterizar los autoestados de una representación irreducible. Resulta conveniente redefinirlos de forma que llamemos $I_3 = X_3/2$, $Y = X_8/\sqrt{3}$. Una representación de los estados de una representación irreducible de $SU(3)$ como puntos en el plano (I_3, Y) es un diagrama de pesos. No obstante, puede haber varios estados de una representación irreducible de $SU(3)$ que tengan los mismos pesos (I_3, Y) . Para diferenciarlos, puede considerarse que estos estados pertenecen a distintas representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$ generado por X_1, X_2, X_3 . Estas representaciones irreducibles se caracterizan por I . Por tanto, los estados base de una representación irreducible de $SU(3)$ vienen caracterizados por $[[Y], I, I_3, Y >$. Con frecuencia, en lugar del diagrama de Young $[Y]$, se utiliza la dimensión correspondiente este diagrama \mathbf{N} para caracterizar la representación irreducible.

7.5.3 Caracterización de los generadores. Diagramas de raíces.

De los generadores del grupo $SU(3)$, la acción de X_3 y X_8 sobre los estados de una base de una representación irreducible de $SU(3)$ caracterizada por $[[Y], I, I_3, Y >$ es trivial. El resto de los generadores pueden definirse como: $I_{\pm} = (X_1 \pm iX_2)/2$, $U_{\pm} = (X_6 \pm iX_7)/2$, $V_{\pm} = (X_4 \pm iX_5)/2$. Con esta definición, y usando las reglas de conmutación, se obtiene que $I_+(I_-)$ aumenta (disminuye) I_3 en una unidad y deja Y invariante, $U_+(U_-)$ disminuye (aumenta) I_3 en $1/2$ y aumenta (disminuye) Y en una unidad, y $V_+(V_-)$ aumenta (disminuye) I_3 en $1/2$ y aumenta (disminuye) Y en una unidad. Gráficamente, en el plano (I_3, Y) los generadores pueden caracterizarse como vectores (ver figura). De esta forma, cuando un generador actúa sobre un estado inicial de una representación irreducible caracterizado por un peso determinado, nos da otro estado caracterizado por un peso final que es la suma del peso inicial más el vector correspondiente al operador. Si el peso final no formara parte del diagrama de pesos de la representación, entonces el generador actuando sobre el estado inicial da cero.

7.5.4 Representaciones principales de $SU(3)$

Representación singlete. Caracterizada por $[1, 1, 1]$. Tiene dimensión $N=1$. Su único estado viene dado por

$$|1, I = 0, I_3 = 0, Y = 0 > .$$

Representación fundamental. Caracterizada por $[1]$. Tiene dimensión $N=3$. Sus estados vienen dados por

$$\begin{aligned} &|3, I = 1/2, I_3 = (1/2, -1/2), Y = 1/3 > \\ &|3, I = 0, I_3 = 0, Y = -2/3 > . \end{aligned}$$

Representación simétrica. Caracterizada por $[2]$. Tiene dimensión $N=6$. Sus estados vienen dados por

$$\begin{aligned} &|6, I = 1, I_3 = (1, 0, -1), Y = 2/3 > \\ &|6, I = 1/2, I_3 = (+1/2, -1/2), Y = -1/3 > \\ &|6, I = 0, I_3 = 0, Y = -4/3 > . \end{aligned}$$

Representación anti-simétrica. Caracterizada por $[1, 1]$. Tiene dimensión $N=3$. Es equivalente a la representación conjugada de la fundamental. Sus estados vienen dados por

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{3}}, I = 1/2, I_3 = (1/2, -1/2), Y = -1/3 > \\ |\bar{\mathbf{3}}, I = 0, I_3 = 0, Y = 2/3 > . \end{aligned}$$

Representación decuplete. Caracterizada por $[3]$. Tiene dimensión $N=10$. Sus estados vienen dados por

$$\begin{aligned} |\mathbf{10}, I = 3/2, I_3 = (3/2, 1/2, -1/2, -3/2), Y = 1 > \\ |\mathbf{10}, I = 1, I_3 = (1, 0, -1), Y = 0 > \\ |\mathbf{10}, I = 1/2, I_3 = (+1/2, -1/2), Y = -1 > \\ |\mathbf{10}, I = 0, I_3 = 0, Y = -2 > . \end{aligned}$$

Representación octete Caracterizada por $[2, 1]$. Tiene dimensión $N=8$. Sus estados vienen dados por

$$\begin{aligned} |\mathbf{8}, I = 1/2, I_3 = (1/2, -1/2), Y = 1 > \\ |\mathbf{8}, I = 1, I_3 = (1, 0, -1), Y = 0 > \\ |\mathbf{8}, I = 0, I_3 = 0, Y = 0 > \\ |\mathbf{8}, I = 1/2, I_3 = (+1/2, -1/2), Y = -1 > . \end{aligned}$$

7.5.5 Descomposición de representaciones producto de $SU(3)$

Serie de Clebsh-Gordan de $SU(3)$ Las series de Clebsh-Gordan las representaciones irreducibles relevantes son las siguientes:

$$\begin{aligned} [1] \times [1] &= [2] + [1, 1] \\ [2] \times [1] &= [3] + [2, 1] \\ [1, 1] \times [1] &= [2, 1] + [1, 1, 1] \\ [3] \times [2, 1] &= [5, 1] + [4, 2] + [3] + [2, 1] \\ [2, 1] \times [2, 1] &= [4, 2] + [2, 1] + [2, 1] + [3] + [3, 3] + [1, 1, 1] \end{aligned}$$

Coefficientes de Clebsh-Gordan Nos dan el desarrollo de producto de estados pertenecientes a representaciones irreducibles de $SU(3)$, en términos de estados pertenecientes a representaciones irreducibles de $SU(3)$. Se expresan según:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}_a I_a I_{3a} Y_a; \mathbf{N}_b I_b I_{3b} Y_b | K \mathbf{N} I I_3 Y \rangle = \\ \langle \mathbf{N}_a I_a Y_a; \mathbf{N}_b I_b Y_b | | K \mathbf{N} I I_3 Y \rangle \\ \langle I_a I_{3a}; I_b I_{3b} | I I_3 \rangle \delta(Y_a + Y_b, Y) \delta(I_{3a} + I_{3b}, I_3) \end{aligned}$$

En esta expresión, las δ provienen del carácter aditivo de I_3 e Y . El coeficiente de Clebsh-Gordan usual proviene de que los estados generan representaciones irreducibles de $SU(2)$, y la expresión con la doble barra representa el valor del coeficiente isoscalar de $SU(3)$, que está tabulado en la tabla adjunta. K es un índice adicional que es necesario en los coeficientes $\mathbf{8} \times \mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8}$, ya que se repite la representación irreducible en la serie de Clebsh-Gordan.

7.6 Problemas

1) Considera tres estados $\{a, b, c\}$ que constituyen una base de la representación fundamental de $SU(3)$, $[1]$. Partiendo de los estados de la representación producto $[1] \times [1]$, obtén los estados de las representaciones irreducibles $[2]$ y $[1, 1]$ actuando con los operadores de Young. Partiendo de los estados de la representación producto $[1] \times [1] \times [1]$, obtén los estados de las representaciones irreducibles $[3]$, $[2, 1]$ y $[1, 1, 1]$ actuando con los operadores de Young.

2) Considera el grupo $SU(3)$. Obtener el diagrama de pesos de la representación fundamental $[1]$. Obtener el diagrama de pesos de la representación producto $[1] \times [1]$. Nota: como los generadores son aditivos, los valores de I_3 e Y del estado producto $|ij\rangle$ son los de $|i\rangle$ más los de $|j\rangle$. Descomponer este diagrama de pesos en los de las representaciones irreducibles $[2]$ y $[1, 1]$. Comprobar que la representación conjugada de $[1]$ es $[1, 1]$. Nota: en la representación conjugada, los generadores, y en concreto I_3 e Y , tienen signo opuesto.

3) Obtener el diagrama de pesos de $[2] \times [1]$ y de $[1, 1] \times [1]$. Descomponerlo en los de las representaciones irreducibles correspondientes.

4) Obtener el diagrama de pesos de la representación $[2, 1] \times [2, 1]$. Esta representación se descompone en suma de las representaciones irreducibles $[1, 1, 1] + [2, 1] + [2, 1] + [3] + [3, 3] + [4, 2]$. Deducir el diagrama de pesos de la representación $[4, 2]$, suprimiendo del diagrama de la representación producto los pesos de las otras representaciones, y considerando que la representación $[3, 3]$ es la conjugada de $[3]$.

4) Obtener las representaciones irreducibles de $SU(2)$ contenidas en $[4, 2]$. Identificar los estados base $|I, I_3, Y\rangle$ correspondientes en el diagrama de pesos.

5) Considera el estado cuyo peso es $(Y = 2, I_3 = 1)$. ¿Cómo actúan (cualitativamente) los 8 generadores del grupo sobre él?

Chapter 8

Modelo SU(3) de sabor

8.1 Octetes, decupletes y singletes de hadrones

En la naturaleza, los bariones y los mesones aparecen a muchas energías. No obstante, los valores del isospín y la hipercarga no aparecen de forma arbitraria.

Por ejemplo, si consideramos los bariones de espín $1/2$ y paridad positiva, $J = 1/2^+$, nos aparecen:

Los nucleones, protón y neutrón, ($Y=1, I=1/2$) con masa promedio 939 MeV.

Las Σ ($Y=0, I=1$) con masa promedio 1192 MeV.

La Λ ($Y=0, I=0$) con masa 1115 MeV.

Las Ξ ($Y=-1, I=1/2$) con masa promedio 1315 MeV.

Los números cuánticos de estas partículas corresponden a los de la representación octete del grupo SU(3).

Del mismo modo, si consideramos las partículas con $J = 3/2^+$, aparecen:

Las resonancias Δ , ($Y=1, I=3/2$), con masa promedio 1232 MeV

Las resonancias Σ^* ($Y=0, I=1$), con masa promedio 1381 MeV

Las resonancias Ξ^* ($Y=-1, I=1/2$), con masa promedio 1532 MeV

La Ω ($Y=-2, I=0$), con masa 1672 MeV.

Los números cuánticos de estas partículas corresponden a la representación decuplete de SU(3).

Si consideramos las partículas con $J = 1/2^-$, encontramos, a energías bajas sólo una resonancia Λ^* ($Y=0, I=0$), con masa 1405 MeV. Ésta corresponde a la representación singlete de SU(3). Del mismo modo, todas las demás resonancias de bariones pueden agruparse como singletes, decupletes u octetes.

En los mesones pseudo-escalares $J = 0^-$, aparecen:

Los kaones K ($Y=1, I=1/2$), con masa 494 MeV,

Los piones π ($Y=0, I=1$), con masa 139 MeV,

La η ($Y=0, I=0$), con masa 547 MeV,

Los anti-kaones \bar{K} ($Y=-1, I=1/2$), con masa 494 MeV.

Los números cuánticos de estas partículas corresponden a la representación octete. Por otro lado, el mesón η' ($Y=0, I=0$), con masa 958 MeV, corresponde a la representación singlete.

En los mesones vectoriales $J = 1^-$, aparecen:

Las resonancias de los kaones K^* ($Y=1, I=1/2$), con masa 892 MeV,

Las ρ ($Y=0, I=1$), con masa 770 MeV,

La ω ($Y=0, I=0$), con masa 782 MeV,

Los anti-kaones \bar{K}^* ($Y=-1, I=1/2$), con masa 892 MeV.

Los números cuánticos de estas partículas corresponden a la representación octete. Por otro lado, el mesón ϕ ($Y=0, I=0$), con masa 958 MeV, corresponde a la representación singlete. Los demás mesones pueden agruparse en singletes u octetes.

Este hecho lleva a considerar que los hadrones que aparecen en la naturaleza generan representaciones irreducibles de un grupo $SU(3)$ de transformaciones, que contiene al grupo $SU(2)$ de las transformaciones de isospín y al grupo $U(1)$ de las transformaciones generadas por la hipercarga. Este grupo, llamado grupo $SU(3)$ de sabor (flavor), o grupo $SU(3)_F$, tiene como generadores, además de Y, I_3, I_+, I_- , los operadores U_+, U_-, V_+, V_- que cambian el valor del isospín y la hipercarga.

8.2 Fórmulas de masas

Si el hamiltoniano que describe las masas de los hadrones fuera invariante frente a la simetría $SU(3)_F$, entonces todas las partículas de un multiplete tendrían la misma masa. Este no es el caso. Los hadrones con $J = 1/2^-$ tienen una masa promedio de unos 1100 MeV, y unas desviaciones con respecto a este valor de unos 200 MeV. Esto indica que la mayor parte del hamiltoniano va a ser invariante frente a transformaciones del grupo $SU(3)_F$, pero hay una parte significativa que no lo es. Para describir este hecho, podemos desarrollar el hamiltoniano en operadores tensoriales del grupo $SU(3)_F$, de forma que tendremos:

$$H = H(N = 1, I = 0, I_3 = 0, Y = 0) + \sum_{N \neq 1, I, I_3, Y} H(N, I, I_3, Y)$$

El primer término es invariante frente a las transformaciones de la simetría $SU(3)_F$. De todas las contribuciones posibles al segundo término, deben considerarse aquellas que conserven el isospín y la hipercarga, ya que sabemos que la interacción fuerte conserva estas magnitudes. Por tanto, sólo deben aparecer operadores para los que $I = I_3 = Y = 0$. No obstante, ésto limita el número de representaciones N , ya que sólo algunas representaciones tienen estados con $I = I_3 = Y = 0$. Estas representaciones son el octete, $Y = [2, 1]$, $N = 8$, la representación $Y = [4, 2]$, $N = 27$, la representación $Y = [6, 3]$, etc. Nuestro objetivo es describir las diferencias de masas dentro de un multiplete. Para ello, tomaremos el primer término del desarrollo anterior que viola la simetría $SU(3)_F$, que es el del octete. Por tanto, podemos aproximar:

$$H = H(N = 1, I = 0, I_3 = 0, Y = 0) + H(N = 8, I = 0, I_3 = 0, Y = 0) = H_1 + H_8$$

Las masas de las partículas de un multiplete se obtienen como el elemento de matriz del hamiltoniano. Como las partículas corresponden a representaciones irreducibles del grupo $SU(3)_F$ (singlete, octete y decuplete), y el hamiltoniano está desarrollado en términos de operadores tensoriales del mismo grupo, pertenecientes a la representación singlete y octete, los elementos de matriz pueden obtenerse en función de los coeficientes de Clebsch-Gordan de $SU(3)$ utilizando el teorema de Wigner-Eckart.

Hadrones pertenecientes a un singlete

$$M(\Lambda) = \langle 1 || H_1 || 1 \rangle$$

La parte octete de H , H_8 , no contribuye a la masa de los hadrones del singlete.

Hadrones pertenecientes a un decuplete

$$\begin{aligned} M(\Delta) &= \langle 10 || H_1 || 10 \rangle + \langle 10 || H_8 || 10 \rangle (1/\sqrt{8}) \\ M(\Sigma) &= \langle 10 || H_1 || 10 \rangle + \langle 10 || H_8 || 10 \rangle (0/\sqrt{8}) \\ M(\Xi) &= \langle 10 || H_1 || 10 \rangle + \langle 10 || H_8 || 10 \rangle (-1/\sqrt{8}) \\ M(\Omega) &= \langle 10 || H_1 || 10 \rangle + \langle 10 || H_8 || 10 \rangle (-2/\sqrt{8}) \end{aligned}$$

Estas expresiones pueden escribirse en forma compacta, llamando $M_{10} = \langle 10 || H_1 || 10 \rangle$, y $\Delta_{10} = - \langle 10 || H_8 || 10 \rangle / \sqrt{8}$. Se tiene entonces que

$$M(N = 10, I, Y) = M_{10} - Y\Delta_{10}$$

Esta expresión predice una relación entre las masas de las partículas del decuplete dadas por $M(\Omega) - M(\Xi) = M(\Xi) - M(\Sigma) = M(\Sigma) - M(\Delta)$, que se cumplen para el decuplete de bariones con $J = 3/2^+$. En concreto, si se toma $M_{10} = 1380$ MeV y $\Delta_{10} = 145$ MeV, se reproducen con buena precisión las masas del decuplete de bariones con $J = 3/2^+$.

Hadrones pertenecientes a un octete En este caso, hay que considerar que hay dos elementos de matriz reducidos y que acoplan las representaciones octete $8 \times 8 \rightarrow 8$.

$$\begin{aligned} M(N) &= \langle 8 || H_1 || 8 \rangle + \langle 8, K = 1 || H_8 || 8 \rangle (-1/2\sqrt{5}) + \langle 8, K = 2 || H_8 || 8 \rangle (-1/2) \\ M(\Lambda) &= \langle 8 || H_1 || 8 \rangle + \langle 8, K = 1 || H_8 || 8 \rangle (-1/\sqrt{5}) + \langle 8, K = 2 || H_8 || 8 \rangle (0) \\ M(\Sigma) &= \langle 8 || H_1 || 8 \rangle + \langle 8, K = 1 || H_8 || 8 \rangle (+1/\sqrt{5}) + \langle 8, K = 2 || H_8 || 8 \rangle (0) \\ M(\Xi) &= \langle 8 || H_1 || 8 \rangle + \langle 8, K = 1 || H_8 || 8 \rangle (-1/2\sqrt{5}) + \langle 8, K = 2 || H_8 || 8 \rangle (+1/2) \end{aligned}$$

Estas expresiones pueden escribirse en forma compacta, llamando $M_8 = \langle 8 || H_1 || 8 \rangle$, $\Delta_8 = - \langle 8, K = 2 || H_8 || 8 \rangle / 2$ y $\Delta'_8 = \langle 8, K = 1 || H_8 || 8 \rangle / \sqrt{5}$. Se tiene entonces que

$$M(N = 8, I, Y) = M_8 - Y\Delta_8 + (I(I + 1) - Y^2/4 - 1)\Delta'_8$$

Esta expresión predice una relación entre las masas de las partículas del octete dada por $M(\Lambda) = 2/3(M(\Xi) + M(N)) - 1/3M(\Sigma)$, que se cumplen para el octete de bariones con $J = 1/2^+$. En concreto, si se toma $M_8 = 1150$ MeV, $\Delta_8 = 188$ MeV, y $\Delta'_8 = 38.5$ MeV, se reproducen con buena precisión las masas del octete de bariones con $J = 1/2^+$.

En el caso de los mesones, las mismas fórmulas serían válidas en principio. Sin embargo, en los octetes de mesones aparecen partículas y antipartículas, y sus masas deben ser iguales por el teorema *CPT*. Por ello, el parámetro Δ_8 , que da una contribución lineal en Y a la masa que sería distinta para partícula y antipartícula, debe anularse. Por tanto, para los mesones del octete, la fórmula de masas es

$$M(N = 8, I, Y) = M_8 + (I(I + 1) - Y^2/4 - 1)\Delta'_8$$

Esta expresión predice una relación entre las masas de los mesones con $J = 0^-$ dada por $M(\eta) = 4/3(M(K)) - 1/3M(\pi)$, que da 619 MeV. Esta masa no es compatible con la de la η , que es 549 MeV, ni con la η' , que es 958 MeV.

8.3 Mezcla de representaciones

Vamos a considerar que los mesones que aparecen en la naturaleza η y η' , son combinaciones de dos estados η_8 y η_1 . El primero pertenece a una representación octete, junto con los piones y kaones. Su masa $M(\eta_8) = \langle \eta_8 | H | \eta_8 \rangle$ viene dada por la relación anterior y es 619 MeV. El segundo genera una representación singlete, y su masa es $M(\eta_1) = \langle \eta_1 | H | \eta_1 \rangle$. Estos estados, aunque pertenecen a representaciones irreducibles diferentes, no difieren mucho en masa, y están conectados por el término $H(N = 8)$ del hamiltoniano. Llamando $\Delta = \langle \eta_1 | H | \eta_8 \rangle$, las masas de los mesones η y η' se obtienen diagonalizando la matriz 2×2 que describe el hamiltoniano. A partir de la conservación de la traza, se tiene $M(\eta_1) + M(\eta_8) = M(\eta) + M(\eta')$, de donde se deduce $M(\eta_1) = 888$ MeV. A partir de la conservación del determinante, se tiene $M(\eta_1)M(\eta_8) - \Delta^2 = M(\eta)M(\eta')$, de donde $\Delta = 154$ MeV. Finalmente, los estados físicos $|\eta\rangle$ y $|\eta'\rangle$ vienen dados por

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= |\eta_8\rangle \cos \theta + |\eta_1\rangle \sin \theta \\ |\eta'\rangle &= -|\eta_8\rangle \sin \theta + |\eta_1\rangle \cos \theta \end{aligned}$$

donde $\theta = 24$ deg.

La mezcla de representaciones es importante para los mesones, ya que las representaciones octete y singlete correspondientes a partículas con el mismo espín y paridad aparecen a energías próximas. La estructura de nueve estados, formada por un octete y un singlete, en el que los estados con $I = 0, Y = 0$ del octete y el singlete pueden mezclarse, se denomina nonete.

En el caso de los bariones podría darse mezcla de representaciones del octete y el singlete, para los estados con $I = 0, Y = 0$, o bien mezcla del octete y el decuplete para los estados con $I = 1, Y = 0$ o $I = 1/2, Y = -1$. No obstante, estas mezclas no son importantes ya que los multipletes de hadrones con el mismo espín y paridad aparecen a energías bastante distintas.

8.4 Aplicaciones de la simetría SU(3)

Hemos visto que la parte principal de la interacción fuerte es invariante frente a la simetría $SU(3)_F$. Si consideramos solamente el efecto del término H_1 , pueden obtenerse las relaciones siguientes:

8.4.1 Decaimiento fuerte de hadrones

Si tenemos un hadrón $|A\rangle$, descrito por $|\alpha, N_A, I_A, I_{3A}, Y_A\rangle$, que decae en dos hadrones $|B\rangle$ y $|C\rangle$, descritos por $|\beta, N_B, I_B, I_{3B}, Y_B\rangle$ y $|\gamma, N_C, I_C, I_{3C}, Y_C\rangle$, habíamos visto que la conservación del isospín implicaba que el elemento de matriz del hamiltoniano podía expresarse en función de un coeficiente de Clebsh-Gordan de SU(2) y un elemento de matriz reducido

$$\langle A | H | BC \rangle = \langle \alpha, N_A, I_A, Y_A | H | \beta, N_B, I_B, Y_B; \gamma, N_C, I_C, Y_C \rangle \langle I_A I_{3A} | I_B I_{3B}; I_C I_{3C} \rangle$$

La conservación de la simetría $SU(3)_F$ implica que el elemento de matriz reducido puede expresarse en términos de los coeficientes de Clebsh-Gordan de SU(3):

$$\begin{aligned} &\langle \alpha, N_A, I_A, Y_A | H | \beta, N_B, I_B, Y_B; \gamma, N_C, I_C, Y_C \rangle \simeq \\ &\sum_K \langle \alpha, N_A, K | H_1 | \beta, N_B; \gamma, N_C \rangle \langle N_A, I_A, Y_A, K | N_B, I_B, Y_B; N_C, I_C, Y_C \rangle \end{aligned}$$

De esta forma, todos los elementos de matriz para el decaimiento de partículas del multiplete α a partículas de los multipletes β y γ vienen dadas en función de los términos $\langle \alpha, N_A, K | H_1 | \beta, N_B; \gamma, N_C \rangle$.

8.4.2 Constantes de acoplamiento fuerte

La conservación del isospín hace que la constante de acoplo $g(A, BC)$ se exprese como

$$g(A, BC) = \bar{g}(\alpha N_A I_A Y_A; \beta N_B I_B Y_B, \gamma N_C I_C Y_C) \langle I_A I_{3A} | I_B I_{3B}; I_C I_{3C} \rangle$$

La conservación de la simetría $SU(3)_F$ hace que

$$\begin{aligned} \bar{g}(\alpha N_A I_A Y_A; \beta N_B I_B Y_B, \gamma N_C I_C Y_C) &\simeq \sum_K \bar{g}(\alpha N_A, K; \beta N_B, \gamma N_C) \\ &\langle N_A I_A Y_A, K | N_B I_B Y_B; N_C I_C Y_C \rangle \end{aligned}$$

De esta forma, todas las constantes de acoplo de las partículas que pertenecen a un multiplete vienen dadas en función una o dos constantes $\bar{g}(\alpha N_A, K; \beta N_B, \gamma N_C)$.

8.4.3 Constantes de la corriente débil

La interacción débil no conserva el isospín ni la hipercarga, por lo que obviamente no conserva la simetría $SU(3)_F$. No obstante, el hamiltoniano de la interacción débil siempre puede desarrollarse en operadores tensoriales del grupo $SU(3)_F$. Sabemos que la interacción débil puede modificar la hipercarga en una unidad, $\Delta Y = \pm 1$, en cuyo caso $\delta I_3 = \pm 1/2$, o bien mantener la hipercarga $\Delta Y = 0$, en cuyo caso $\delta I_3 = \pm 1, 0$. Ese comportamiento es el de los generadores del grupo $SU(3)_F$, que generan una representación octete. Por tanto, las constantes de la corriente débil vector y axial, entre partículas A y B que pertenecen al multiplete N pueden expresarse

$$g_{v,a}^{A \rightarrow B} = \sum_{K, I, I_3, Y} g_{v,a}^K(I, I_3, Y) \langle N I_B I_{3B} Y_B K | 8 I I_3 Y, N I_A I_{3A} Y_A \rangle$$

Esta expresión permite, por ejemplo, relacionar las constantes de la corriente débil vector y axial para los procesos $n \rightarrow p, \Sigma^- \rightarrow \Sigma^0, \Sigma^- \rightarrow \Lambda, \Sigma^0 \rightarrow \Sigma^+, \Lambda \rightarrow \Sigma^+, \Xi^- \rightarrow \Xi^0$, todos los cuales provienen de $g_{v,a}^K(I = 1, I_3 = 1, Y = 0)$.

8.5 Problemas

1) A 2350 MeV existe una resonancia $\Lambda(2350)$. Esta resonancia decae por interacción fuerte en un barión del octete con $J = 1/2^+$, y un mesón del octete con $J = 0^-$.

a) Encontrar en qué parejas de partículas puede decaer, conservando los números cuánticos aditivos.

b) Cómo están relacionadas las probabilidades de decaimiento a estas parejas por la conservación del isospín.

c) Considerando la simetría $SU(3)$, cómo están relacionados los elementos de matriz del hamiltoniano para los distintos decaimientos, si $\Lambda(2350)$ constituye un singlete de $SU(3)$.

d) Lo mismo, si forma parte de un octete.

2) Los mesones vectoriales $J = 1^-$, forman un nonete, con $\rho(770)$ ($I=1, Y=0$), $K(892)$ ($I=1/2, Y=1$), $\bar{K}(892)$ ($I=1/2, Y=-1$), $\omega(783)$ ($I=0, Y=0$), $\phi(1020)$ ($I=0, Y=0$), de forma que las dos últimas son mezcla de un mesón del octete ω_8 y uno del singlete ω_1 .

a) Obtener las masas de ω_8 y ω_1 .

b) Obtener el término que mezcla octete y singlete, el término M_8 y el término Δ_8 , y compararlos con los del nonete de mesones pseudoescalares $J = 0^-$.

c) Obtener la función de onda de $\omega(783)$ y $\phi(1020)$, en función del ángulo de mezcla.

3) Considera las resonancias de los bariones con $J = 1/2^+$, $N(1440)$, $\Lambda(1600)$, $\Sigma(1660)$. Considerando que forman parte de un octete,

a) Predecir la energía a la que debe aparecer una resonancia Ξ con $J = 1/2^+$.

b) Calcular los términos M_8 , Δ_8 y Δ'_8 , y compararlos con los del octete fundamental

Chapter 9

Modelo de Quarks

El modelo $SU(3)_F$ permite relacionar muchas propiedades de los hadrones. No obstante, es un modelo fenomenológico, que no explica el origen de dicha simetría. En concreto, no explica por qué en para los bariones sólo aparecen las representaciones $N=1$, $N=8$ y $N=10$, mientras que para los mesones aparecen $N=1$ y $N=8$. Es especialmente llamativo que en la naturaleza no aparezca la representación fundamental de $SU(3)_F$, $N=3$.

9.1 Los quarks como representación fundamental de $SU(3)$ de sabor

La hipótesis fundamental del modelo de quarks es que existe una partícula, llamada quark, con tres estados internos o “sabores”, llamados u , d y s , que generan la representación fundamental del grupo $SU(3)_F$. Estos tres estados, por tanto, son autoestados de I_3 e Y , correspondiente a los autovalores mostrados en la tabla. Por la relación de $Q/e = I_3 + Y/2$, se tiene que los estados u , d y s tienen carga fraccionaria.

Los bariones aparecen en las representaciones $N=1$, $N=8$ y $N=10$, cuyos diagramas de Young son $[1, 1, 1]$, $[2, 1]$, $[3]$. Estas representaciones son las que aparecen al descomponer la representación producto $[1] \times [1] \times [1]$ en representaciones irreducibles. Por tanto, se considera que los bariones son sistemas de tres quarks. Como todos los bariones tienen $B=1$, y el número bariónico es aditivo, todos los estados del quark deben tener $B = 1/3$. A partir de la relación $Y = B + S$, se obtiene la extrañeza de los quarks.

	I_3	Y	Q/e	B	S
u	1/2	1/3	2/3	1/3	0
d	-1/2	1/3	-1/3	1/3	0
s	0	-2/3	-1/3	1/3	-1

La antipartícula del quark, el antiquark, tiene tres estados o “sabores”, \bar{u} , \bar{d} , \bar{s} , cuyos números cuánticos aditivos son los opuestos a los de los estados u , d , s . Los tres estados del antiquark, por tanto, generan la representación conjugada a la fundamental, $N = \bar{3}$, descrita por el diagrama $[1, 1]$. En el modelo de quarks, los mesones son sistemas quark-antiquark. Por tanto, su número bariónico es cero, y aparecen en las representaciones $N=1$ y $N=8$ ya que un sistema quark-antiquark, genera la representación reducible $[1] \times [1, 1]$, que se descompone en las representaciones irreducibles $[1, 1, 1] + [2, 1]$.

9.1.1 Funciones de onda de sabor de los hadrones

En lo que sigue, se hablará de quarks u , d y s , aunque el concepto correcto es que se trata de estados o “sabores” u, d, s del quark.

A partir de los valores de I_3 e Y de los bariones, podemos inferir cual es su composición en quarks. Así, la Ω^- está compuesta de tres quarks s : $\Omega^- \rightarrow sss$. Igualmente, $\Delta^{++} \rightarrow uuu$, y $\Delta^- \rightarrow ddd$. Por otro lado, $\Sigma^+ \rightarrow uus$, $\Sigma^- \rightarrow dds$, $\Xi^0 \rightarrow uss$, $\Xi^- \rightarrow dss$. Además, Σ_0 y Λ , que tienen el mismo valor de I_3 e Y , están compuestas por uds , Δ^0 y n por udd , y Δ^+ y n por uud .

Para los mesones, compuestos de quarks y antiquarks, podemos hacer lo propio. $K^- \rightarrow s\bar{u}$, $\bar{K}^0 \rightarrow s\bar{d}$, $K^+ \rightarrow u\bar{s}$, $K^0 \rightarrow d\bar{s}$. π^+ y ρ^+ están compuestos de $u\bar{d}$, y π^- y ρ^- están compuestos de $d\bar{u}$. Los mesones totalmente neutros $\pi^0, \rho^0, \eta, \omega, \phi$ son distintas combinaciones de $u\bar{u}, d\bar{d}$ y $s\bar{s}$.

Los estados concretos de los hadrones generan representaciones irreducibles del grupo $SU(3)_F$. Estos estados se obtienen proyectando con el operador de Young relevante los estados producto de los sabores de los quarks. Así, para el decuplete, $Y = [3]$, y el operador es S_{123} . Por tanto, el estado de sabor de la Σ^0 del decuplete es:

$$|\Sigma^0, \mathbf{10}\rangle = S_{123}|uds\rangle = (|uds\rangle + |usd\rangle + |dsu\rangle + |dus\rangle + |sud\rangle + |sdu\rangle)/\sqrt{6}$$

Este estado genera una representación irreducible del grupo S_3 de las permutaciones de los sabores correspondiente al diagrama [3]. Es, por tanto, la representación totalmente simétrica. Por otro lado, los diez estados correspondientes al decuplete de hadrones generan una representación irreducible del grupo $SU(3)_F$, que también se caracteriza por el diagrama [3].

Para los estados del singlete, $Y = [1, 1, 1]$, y el operador es A_{123} . Por tanto, el estado de sabor de la Λ del singlete es:

$$|\Lambda, \mathbf{1}\rangle = A_{123}|uds\rangle = (|uds\rangle - |usd\rangle + |dsu\rangle - |dus\rangle + |sud\rangle - |sdu\rangle)/\sqrt{6}$$

Este estado genera una representación irreducible del grupo S_3 de las permutaciones de los sabores correspondiente al diagrama [1, 1, 1]. Es, por tanto, la representación totalmente antisimétrica. Por otro lado, este estado, correspondiente al singlete de hadrones, genera una representación irreducible del grupo $SU(3)_F$, que también se caracteriza por el diagrama [1, 1, 1].

Para los estados del octete, $Y = [2, 1]$, hay dos operadores posibles: $A_{13}S_{12}$ y $A_{12}S_{13}$. Por tanto, hay dos estados de sabor posibles linealmente independientes para cada hadrón del octete. Estos son, para el protón,

$$\begin{aligned} |p, \mathbf{8}(A)\rangle &= A_{13}S_{12}|uud\rangle = (|uud\rangle - |duu\rangle)/\sqrt{2} \\ |p, \mathbf{8}(B)\rangle &= A_{12}S_{13}|uud\rangle = (|duu\rangle - |udu\rangle)/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Estos dos estados, ortogonalizados, generan una representación irreducible del grupo S_3 de las permutaciones de las variables de sabor correspondiente al diagrama [2, 1]. Una forma conveniente de expresar los estados ortogonales es:

$$\begin{aligned} |p, \mathbf{8}(1)\rangle &= (|uud\rangle - |udu\rangle)/\sqrt{2} \\ |p, \mathbf{8}(2)\rangle &= (|uud\rangle + |udu\rangle - 2|duu\rangle)/\sqrt{6} \end{aligned}$$

Por otro lado, los ocho estados de tipo (1) correspondientes a los hadrones del octete, generan una representación irreducible del grupo $SU(3)_F$, que también se caracteriza por

el diagrama [2, 1], y lo mismo ocurre con los ocho estados de tipo (2). Por ejemplo, los estados de la Σ^+ se obtienen a partir de los anteriores sustituyendo el quark d por el s :

$$\begin{aligned} |\Sigma^+, \mathbf{8}(1) \rangle &= (|uus \rangle - |usu \rangle)/\sqrt{2} \\ |\Sigma^+, \mathbf{8}(2) \rangle &= (|uus \rangle + |usu \rangle - 2|suu \rangle)/\sqrt{6} \end{aligned}$$

Los estados de la Σ^0 se obtienen actuando con el operador I^- sobre los de Σ^+ :

$$\begin{aligned} |\Sigma^0, \mathbf{8}(1) \rangle &= (|uds \rangle + |dus \rangle - |usd \rangle - |dsu \rangle)/2 \\ |\Sigma^0, \mathbf{8}(2) \rangle &= (|uds \rangle + |dus \rangle + |usd \rangle + |dsu \rangle - 2|sud \rangle - 2|sdu \rangle)/\sqrt{12} \end{aligned}$$

Los estados de la Λ son estados del octete ortogonales a los anteriores:

$$\begin{aligned} |\Lambda, \mathbf{8}(1) \rangle &= (|uds \rangle - |dus \rangle - |usd \rangle + |dsu \rangle)/2 \\ |\Lambda, \mathbf{8}(2) \rangle &= (|uds \rangle - |dus \rangle + |usd \rangle - |dsu \rangle - 2|sud \rangle + 2|sdu \rangle)/\sqrt{12} \end{aligned}$$

Los estados de sabor de la Σ^0 y de la Λ del octete difieren porque el primero tiene isospín 1 y el segundo isospín cero, pero ambos están compuestos por los quarks uds .

En el caso de los mesones, las funciones de onda de sabor pueden obtenerse considerando que la función de onda de sabor del antiquark es equivalente a la función de onda de sabor de dos quarks en combinación antisimétrica. Así, $\bar{u} \simeq ds - sd/\sqrt{2}$, $\bar{d} \simeq su - us/\sqrt{2}$ y $\bar{s} \simeq ud - du/\sqrt{2}$. Por tanto, sustituyendo estas combinaciones en las funciones de onda de los bariones, obtenemos que para los mesones del singlete, la función de onda de sabor viene dada por

$$|\eta, \mathbf{1} \rangle = (|u\bar{u} \rangle + |d\bar{d} \rangle + |s\bar{s} \rangle)/\sqrt{3}$$

y para los mesones del octete, tenemos $|K^+, \mathbf{8} \rangle = |u\bar{s} \rangle$, $|K^0, \mathbf{8} \rangle = |d\bar{s} \rangle$, $|K^-, \mathbf{8} \rangle = |s\bar{u} \rangle$, $|\bar{K}^0, \mathbf{8} \rangle = |s\bar{d} \rangle$, $|\bar{\pi}^+, \mathbf{8} \rangle = |u\bar{d} \rangle$, $|\bar{\pi}^-, \mathbf{8} \rangle = |d\bar{u} \rangle$, y

$$\begin{aligned} |\pi^0, \mathbf{8} \rangle &= (|u\bar{u} \rangle - |d\bar{d} \rangle)/\sqrt{2} \\ |\eta, \mathbf{8} \rangle &= (2|s\bar{s} \rangle - |u\bar{u} \rangle - |d\bar{d} \rangle)/\sqrt{6} \end{aligned}$$

Sólo hay un estado de sabor para cada mesón del octete, y no hay estados decuplete (**10**) para los mesones. Ello está relacionado con el hecho de que, en el producto de la representación fundamental de $SU(3)$, [1], que corresponde a los quarks, con la representación conjugada [1, 1], que corresponde a los antiquarks, sólo aparecen la representación singlete [1, 1, 1] y la representación octete [2, 1].

En el modelo de quarks, la simetría $SU(3)_F$ aparece porque las interacciones entre los quarks son independientes del sabor. Las desviaciones de la simetría $SU(3)_F$ aparecen debido a que la masa del quark s es superior a la masa de los quarks u y d . Este hecho también explica la mezcla de configuraciones que aparece en los mesones. Así, si el hamiltoniano que describe al sistema quark-antiquark estuviera determinado por las interacciones entre éstos, la simetría $SU(3)_F$ sería exacta, y $|\eta, N = 1 \rangle$ y $|\eta, N = 8 \rangle$ serían los autoestados del hamiltoniano. Por el contrario, si las masas de los quarks fueran determinantes, los autoestados serían $|s\bar{s} \rangle$ y $(|u\bar{u} \rangle + |d\bar{d} \rangle)/\sqrt{2}$. La situación física real es intermedia entre estos dos casos.

9.1.2 Los quarks como fermiones: el color

Los quarks, si realmente corresponden a partículas físicas, deben ser fermiones, ya que tres de ellos forman un fermión, y una pareja quark-antiquark forma un bosón. Por tanto, para los tres quarks que forman un barión, su función de onda debe ser totalmente antisimétrica frente al intercambio de cualquier pareja de quarks. Por tanto, frente al grupo S_3 de las permutaciones de los quarks, la función de onda debe pertenecer a la representación irreducible $[1, 1, 1]$. Intercambiar los quarks es equivalente a intercambiar todas sus variables. Éstas son, en principio, las variables orbitales, las de espín y las de sabor.

La función de onda orbital de los quarks en los bariones, al menos los que aparecen en multipletes a energías más bajas, como el octete con $J = 1/2^+$ y el decuplete con $J = 3/2^+$, debe ser totalmente simétrica, correspondiente a la representación $[3]$ del grupo S_3 de las permutaciones de las variables orbitales. Esto se debe a que corresponden a los sistemas más ligados de tres quarks. Si la función no fuera simétrica, existirían nodos en la función de onda cuando las coordenadas de dos de los quarks coincidieran. Estos nodos aumentarían la energía cinética, y reducirían el efecto de la atracción de los quarks. Por otro lado, el momento angular orbital de los tres quarks, en su sistema centro de masas, debe ser $L = 0$. Si no es así, la función de onda se anularía en ciertas direcciones, de forma análoga a los armónicos esféricos con $L \neq 0$.

Frente al grupo S_3 de las permutaciones de las variables de espín, la función de onda de espín, considerando que los quarks tienen espín $s = 1/2$, es totalmente simétrica $[3]$ cuando el espín total es $S = 3/2$, y tiene simetría mixta $[2, 1]$ cuando el espín total es $S = 1/2$, ya que dos espines se acoplan a $S = 0$, por lo que sus funciones de onda son antisimétricas. Para las partículas del decuplete con $J = 3/2^+$, como $L = 0$, el espín total de los tres quarks es $S = 3/2$. Por tanto, la función de onda de espín es totalmente simétrica $[3]$. Para las partículas del octete, con $J = 1/2^+$, el espín total de los tres quarks es $S = 1/2$. Por tanto, la función de onda de espín tiene simetría mixta $[2, 1]$.

Con respecto al grupo S_3 de las permutaciones de las variables de sabor, la función de onda de las partículas del decuplete es totalmente simétrica $[3]$, mientras que para el octete la función tiene la simetría $[2, 1]$.

Si consideramos el grupo S_3 de las permutaciones de las variables orbitales, de espín y de sabor, la función de onda del decuplete vendrá caracterizada por la representación producto $[3] \times [3] \times [3]$, que coincide con la representación totalmente simétrica $[3]$. Por tanto, aparentemente, no se cumpliría el principio de Pauli. La función de onda del octete viene caracterizada por la representación producto $[3] \times [2, 1] \times [2, 1]$, que contiene las representaciones $[3]$, $[2, 1]$ y $[1, 1, 1]$. En este caso, sí podría satisfacerse el principio de Pauli, si se toman los estados de la representación $[1, 1, 1]$.

Para resolver estas paradojas, se introduce un nuevo grado de libertad, el color. Existen tres estados de color para los quarks, llamados r, v, a . Se exige que en los bariones, la función de onda de color debe ser totalmente antisimétrica frente al grupo S_3 del intercambio de los colores de los quarks. Así, para caracterizar la función de onda de los quarks en los bariones, hay que especificar la función de onda orbital, de espín, de sabor y de color. Por tanto, para el grupo S_3 de las permutaciones de todas las variables, la función de onda de los quarks en el decuplete viene caracterizada por $[3] \times [3] \times [3] \times [1, 1, 1]$, que coincide con la representación totalmente antisimétrica $[1, 1, 1]$, y es, por tanto, consistente con el principio de Pauli. Para el octete, la función de onda viene caracterizada por $[3] \times [2, 1] \times [2, 1] \times [1, 1, 1]$. Si se toman los estados en los que la función de onda es

simétrica frente al intercambio de las variables de espín y de sabor, la función de onda total es antisimétrica.

Es imposible construir una función de onda totalmente antisimétrica, que sea simétrica con respecto a las variables orbitales y antisimétrica con respecto a las variables de sabor. Ello explica que no aparezcan singletes a energías bajas en los bariones.

La función de onda de color de un barión cualquiera viene dada por

$$|\Psi_c(B)\rangle = A_{123}|rva\rangle = (|rva\rangle - |rav\rangle + |var\rangle - |vra\rangle + |arv\rangle - |avr\rangle)/\sqrt{6}$$

En el caso de los mesones, las funciones de onda de color pueden obtenerse considerando que la función de onda de color del antiquark es equivalente a la función de onda de color de dos quarks en combinación antisimétrica. Así, $\bar{r} \simeq va - av/\sqrt{2}$, $\bar{v} \simeq ar - ra/\sqrt{2}$ y $\bar{a} \simeq rv - va/\sqrt{2}$. Por tanto, sustituyendo estas combinaciones en las funciones de onda de los bariones, obtenemos que para los mesones, la función de onda de color viene dada por

$$|\Psi_c(M)\rangle = (|r\bar{r}\rangle + |v\bar{v}\rangle + |a\bar{a}\rangle)/\sqrt{3}$$

El hecho de que los hadrones sólo aparezcan en la naturaleza como combinaciones antisimétricas de color indica que existe una simetría en la naturaleza asociada a las transformaciones lineales entre los tres colores, descrita por el grupo $SU(3)_C$. Esta simetría es exacta, a diferencia de la simetría $SU(3)_F$ asociada al sabor.

9.1.3 Momento magnético

Como vimos en el caso de los leptones, el momento magnético es un criterio adecuado para considerar si una partícula es elemental. Si los quarks son realmente elementales y tienen $J=1/2$, su momento magnético viene determinado por la ecuación de Dirac

$$\mu(q) = \langle q, J = 1/2, M = 1/2 | \mu_z(q) | q, J = 1/2, M = 1/2 \rangle = Z(q) e\hbar/2m(q)c.$$

Podemos estimar que la masa de los quarks u y d , dentro de un barión vienen dadas por $m_u = m_d = m_p/3$. La masa del quark s es superior, y puede estimarse como $m = s = 5/9m_p$. En unidades del magnetón nuclear $\mu_N = e\hbar/2m_p c$, tenemos que $\mu(u) = 2\mu_N$, $\mu(d) = -\mu_N$ y $\mu(s) = -3/5\mu_N$. A partir de estos valores, pueden calcularse los momentos magnéticos de algunos hadrones.

Para calcular el momento magnético de un sistema de partículas (quarks en nuestro caso), hay que considerar la contribución del momento angular orbital y del momento angular intrínseco de cada partícula. Para los bariones del octete con $J = 1/2^+$, y para los del decuplete con $J = 3/2^+$, y para los mesones pseudoescalares y vectoriales, el momento angular orbital es cero, por lo que sólo hay que considerar el momento angular intrínseco de los quarks. Por tanto, el momento magnético del sistema A (barión o mesón), viene dado por:

$$\mu(A) = \langle A, J, M = J | \mu_z | A, J, M = J \rangle = \langle A, J, M = J | \sum_i \mu_z(q_i) | A, J, M = J \rangle$$

Para calcular $\mu(A)$ es necesario conocer el desarrollo de la función de onda en términos de funciones en las que los quarks u , d y s (o los anti-quarks correspondientes) tienen proyecciones definidas de su espín en torno al eje z . Este desarrollo es lo que llamamos **función de onda de espín-sabor**. Una vez efectuado este desarrollo, puede evaluarse

el momento magnético ya que, para cada quark, $\langle qm = 1/2 | \mu_z(q) | qm = 1/2 \rangle = \mu(q)$. Los antiquarks tienen momento magnético opuesto a los quarks. Por otro lado, por el teorema de Wigner-Eckart, $\langle qm = -1/2 | \mu_z(q) | qm = -1/2 \rangle = -\mu(q)$.

Los mesones pseudoescalares tienen $J = 0^-$. Corresponden a una pareja quark-antiquark con $L = 0$ y $S = 0$. Por ejemplo, el π^+ está compuesta por $u\bar{d}$. Su momento magnético es

$$\mu(\pi^+) = \langle \pi^+ J = 0, M = 0 | \mu_z | \pi^+ J = 0, M = 0 \rangle$$

Tienen obviamente momento magnético cero, por el teorema de Wigner-Eckart. El momento angular $J = 0, M = 0$ indica que los espines del quark y el antiquark son opuestos. Por tanto, la función de onda de espín-sabor es.

$$\begin{aligned} |\pi^+, J = 0, M = 0 \rangle &= (1/\sqrt{2})|u, m = 1/2 \rangle |\bar{d}, m = -1/2 \rangle \\ &- (1/\sqrt{2})|u, m = -1/2 \rangle |\bar{d}, m = 1/2 \rangle \end{aligned}$$

Por tanto, como habíamos previsto,

$$\mu(\pi^+) = 1/2(\mu(u) - \mu(\bar{d})) + 1/2(-\mu(u) + \mu(\bar{d})) = 0$$

Los mesones vectoriales tienen $J = 1^-$. Corresponden a quark-antiquark con $L = 0$ y $S = 1$. Estas asignaciones son consistentes con las paridades P y C de los mesones. Por ejemplo, la ρ^+ está compuesta por $u\bar{d}$. Su momento magnético es

$$\mu(\rho^+) = \langle \rho^+ J = 1, M = 1 | \mu_z | \rho^+ J = 1, M = 1 \rangle$$

El momento angular $J = 1, M = 1$ indica que los espines del quark y el antiquark tienen $m = 1/2$. Por tanto, la función de onda de espín-sabor es.

$$|\rho^+, J = 1, M = 1 \rangle = |u, m = 1/2 \rangle |\bar{d}, m = 1/2 \rangle$$

Por tanto,

$$\mu(\rho^+) = \mu(u) + \mu(\bar{d}) = \mu(u) - \mu(d) = 3\mu_N$$

Los bariones del decuplete tienen $J = 3/2^-$. Son sistemas de tres quarks con $L = 0$ y $S = 3/2$. El momento magnético viene dado por el momento angular de espín de los quarks. En el caso de la Ω^- , se tiene que la función de onda de espín-sabor viene dada por:

$$|\Omega^- J = 3/2, M = 3/2 \rangle = |s, m = 1/2 \rangle |s, m = 1/2 \rangle |s, m = 1/2 \rangle$$

Por tanto,

$$\mu(\Omega^-) = \mu(s) + \mu(s) + \mu(s) = -1.8\mu_N$$

que está en buen acuerdo con el valor experimental de $-1.94 \pm 0.22\mu_N$.

En el caso del octete, los bariones tienen $J = 1/2^-$. Existe una correlación entre las variables de espín y las de sabor, de forma que la función de onda debe ser simétrica frente al intercambio simultáneo de las variables de espín y sabor. Para el caso del protón, ello hace que los espines de los dos quarks u , cuya función de onda de sabor es obviamente simétrica, deben acoplarse a $J_{uu} = 1$, para que la función de onda de espín sea también simétrica. Éste se acopla al momento angular del quark d para dar momento angular total $J = 1/2$. Por tanto, se tiene que la función de onda de espín-sabor es

$$\begin{aligned} |p, J = 1/2, M = 1/2 \rangle &= \sqrt{2/3}|uu, J_{uu} = 1, M_{uu} = 1 \rangle |d, m = -1/2 \rangle \\ &- \sqrt{1/3}|uu, J_{uu} = 1, M_{uu} = 0 \rangle |d, m = 1/2 \rangle \end{aligned}$$

Desarrollando este estado, se tiene

$$\begin{aligned}
 |p, J = 1/2, M = 1/2 \rangle &= \sqrt{2/3}|u, m = 1/2 \rangle |u, m = 1/2 \rangle |d, m = -1/2 \rangle \\
 &- \sqrt{1/3}|u, m = 1/2 \rangle |u, m = -1/2 \rangle |d, m = 1/2 \rangle
 \end{aligned}$$

A partir de esto, se obtiene

$$\mu(p) = 2/3(\mu(u) + \mu(u) - \mu(d)) + 1/3(\mu_u - \mu_u + \mu_d) = 3\mu_N$$

en buen acuerdo con el valor experimental de $2.7928\mu_N$, dada la crudeza del modelo. El caso del neutrón se obtiene cambiando u por d, y se tiene

$$\mu(n) = 2/3(\mu(d) + \mu(d) - \mu(u)) + 1/3(\mu_d - \mu_d + \mu_u) = -2\mu_N$$

de acuerdo con el valor experimental de $-1.9130\mu_N$.

9.2 Interacciones entre quarks

Una vez que los hadrones se describen como sistemas de tres quarks, las interacciones en las que intervienen hadrones deben ser descritas en términos de interacciones entre los quarks que los constituyen. En esta sección describiremos de forma cualitativa las interacciones entre los quarks, mientras que en el tema siguiente se realizara la derivación formal de las interacciones.

9.2.1 Interacción fuerte.

Los quarks interactúan entre ellos como resultado de su carga de color. De la misma forma que la interacción electromagnética está asociada a la carga eléctrica, la interacción entre quarks está asociada a su color.

En la interacción electromagnética, cargas del mismo signo se repelen mientras que las cargas de distinto signo se atraen. En la interacción de color, las combinaciones de quarks simétricas frente al intercambio de colores se repelen, mientras que las combinaciones antisimétricas se atraen. Ello hace que los hadrones sean siempre combinaciones antisimétricas de colores.

La interacción electromagnética se debe al intercambio de un fotón, que corresponde al generador del grupo $U(1)$. El fotón no tiene carga eléctrica, por lo que los fotones no interactúan entre sí. La interacción de color se debe al intercambio de ocho partículas, tantas como generadores del grupo $SU(3)_C$. Estas partículas tienen carga de color, por lo que interactúan entre sí, y producen que la interacción aumente con la distancia entre quarks. Esto provoca el confinamiento.

La interacción de color cambia el color de los quarks. No obstante, no se modifica el sabor de los quarks.

La interacción fuerte entre hadrones aparece como una interacción residual. Del mismo modo que la interacción de Van der Waals es una interacción residual de la interacción electromagnética entre átomos neutros, la interacción fuerte entre hadrones es una interacción residual de la interacción de color entre sistemas incoloros, es decir, que forman una combinación totalmente antisimétrica de color.

9.2.2 Interacción electromagnética.

La interacción electromagnética entre quarks es básicamente igual a la interacción electromagnética entre hadrones, en la que simplemente hay que considerar el valor fraccionario de la carga de los quarks. El modelo de quarks permitiría, en principio, calcular el decaimiento de $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ como un proceso de aniquilación quark-antiquark, o el decaimiento de $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$ como una transición en la que los espines de los quarks u y d pasan de estar acoplados a $J = 1$ en la Σ^0 a estar acoplados a $J = 0$ en la Λ .

La interacción electromagnética no modifica ni el color ni el sabor de los quarks.

9.2.3 Interacción débil. Ángulo de Cabibbo. Matriz CKM.

La interacción débil se produce por el intercambio de los bosones W^\pm (y Z^0 , como veremos en el tema siguiente). Esa interacción no modifica el color de los quarks, pero sí puede modificar el sabor. Así, aparecen corrientes que cambian el sabor de los quarks, pero no cambian la extrañeza, como:

$$j_\mu^{+d \rightarrow u} = iV_{ud}\bar{\psi}_u(1 - \gamma_5)\psi_d$$

y corrientes que cambian la extrañeza, como

$$j_\mu^{+s \rightarrow u} = iV_{us}\bar{\psi}_u(1 - \gamma_5)\psi_s$$

Nótese que aparece el término $(1 - \gamma_5)$, que indica que sólo los quarks con quiralidad negativa sienten la interacción débil. Además, V_{ud} y V_{us} pueden expresarse como $\cos\theta_c$ y $\sin\theta_c$, donde θ_c es el ángulo de Cabibbo. Esto sugiere que puede definirse un estado de sabor $d' = d\cos\theta_c + s\sin\theta_c$, de tal forma que la interacción débil puede definirse como corrientes que acoplan el sabor u al sabor d' , que son formalmente idénticas a las que acoplan los leptones con sus neutrinos.

La introducción del ángulo de Cabibbo sugiere que la combinación ortogonal a d' , llamada $s' = -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c$, también debería sentir la interacción débil, y, por tanto, debiera acoplarse a un nuevo sabor del quark, análogo al quark u , con carga $+2/3$. Este es el quark c (charmed, encantado), que se descubrió experimentalmente. Posteriormente, se encontraron el quark b (bottom, fondo), de carga $-1/3$, y, muy recientemente, el quark t (top, cima), de carga $+2/3$. La interacción débil conecta los sabores de los quarks carga $+2/3$ con los de carga $-1/3$. Los 9 posibles acoplamientos vienen descritos por la matriz de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa, o CKM. En términos de la matriz CKM, pueden definirse los estados de sabor d', s', b' , acoplados respectivamente a u, c, t , y definidos por:

$$\begin{aligned} d' &= V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b \\ s' &= V_{cd}d + V_{cs}s + V_{cb}b \\ b' &= V_{td}d + V_{ts}s + V_{tb}b \end{aligned}$$

La matriz CKM es unitaria, y las fases de los estados d, s, b y d', b', s' pueden elegirse de forma que la matriz se define en función de tres ángulos reales $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$, y una fase δ_{13} , que hace que la matriz CKM sea compleja, y por tanto, la interacción débil viole CP y T. En concreto, se tiene $s_{12} = \sin\theta_{12} = 0.220(3)$, $s_{23} = \sin\theta_{23} = 0.039(3)$ y $s_{13} = \sin\theta_{13} = 0.0031(13)$. En función de estos valores, e ignorando términos cuadráticos

en s_{13} y s_{23} , se tiene, llamando $c_{12} = \cos \theta_{12}$,

$$\begin{aligned} V_{ud} &= c_{12} & V_{us} &= s_{12} & V_{ub} &= s_{13} \exp(-i\delta_{13}) \\ V_{cd} &= -s_{12} & V_{cs} &= c_{12} & V_{cb} &= s_{23} \\ V_{td} &= s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13} \exp(i\delta_{13}) & V_{ts} &= -c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13} \exp(i\delta_{13}) & V_{tb} &= 1 \end{aligned}$$

Nótese que la fase δ_{13} , responsable de la violación de CP y T, aparece en los acoplamientos a los quarks pesados, b y t . Los análisis de violación de CP basados en la matriz CKM parecen indicar que $\delta_{13} \sim \pi/2$, con lo que V_{ub} sería principalmente imaginario.

9.3 Quarks pesados

9.3.1 Quark c

El quark c , predicho teóricamente por los argumentos expuestos, fue descubierto en 1974 simultáneamente en colisiones e^-e^+ en SLAC (Stanford) y en colisiones $p + Be \rightarrow e^+ + e^- + X$ en BNL (Brookhaven). A una energía del e^+e^- de 3097 MeV, aparecía una resonancia muy estrecha, cuya anchura era de 63 keV. Esta anchura sólo podía deberse a una nueva partícula, llamada J/ψ , que decae por interacción electromagnética. De hecho, corresponde a un sistema $c\bar{c}$ con $J = 1^-$. Posteriormente, se descubrieron otras partículas con el quark c : los mesones $D^+(c\bar{d})$ y $D^-(d\bar{c})$, de masa 1869.4 MeV, y $D^0(c\bar{u})$ y $\bar{D}^0(u\bar{c})$, de masa 1864.6 MeV, y el barión $\Lambda_c^+(udc)$, de masa 2285.1 MeV, que decaen por interacción débil, y muchas otras partículas.

9.3.2 Quark b

El quark b no resultó inesperado, ya que previamente, en 1975, se había descubierto el leptón τ . Por tanto, si había tres familias de leptones, no era raro que hubiera tres familias de quarks. Su descubrimiento se hizo en 1977 al encontrar resonancias en las colisiones $p + Be, Cu, Pt \rightarrow \mu^+ + \mu^- + X$ en Fermilab (Chicago), posteriormente confirmadas en experimentos e^+e^- en Doris (Hamburgo). Estas resonancias se debían a una partícula Υ , de masa 9.46 GeV y anchura 42 KeV, que decae por interacción electromagnética. De hecho, corresponde a un sistema $c\bar{c}$ con $J = 1^-$. Posteriormente, se descubrieron otras partículas con el quark b : los mesones $B^+(u\bar{b})$ y $B^-(b\bar{u})$, de masa 5278.4 MeV, y $B^0(d\bar{b})$ y $\bar{B}^0(b\bar{d})$, de masa 5279.0 MeV, y el barión $\Lambda_b^0(udb)$, de masa 5641 MeV, que decaen por interacción débil, y muchas otras partículas.

9.3.3 Quark t

El quark t ha sido descubierto recientemente (1995) en FermiLab, en procesos de colisión $p\bar{p}$. No se observó directamente como una resonancia, ya que las partículas compuestas por el quark t tienen una vida extremadamente corta. Lo que se observaron eran ciertos eventos que generaban chorros de partículas que se considera que están originadas por el quark t . A partir de estos chorros de partículas, se deduce que la masa del quark t es 174.3 ± 5.1 GeV (1999).

Las masas de los quarks no son directamente observables, ya que los quarks no se encuentran aislados. Sus masas, llamadas masas “corrientes” pueden obtenerse sustrayendo

el efecto de la energía cinética y de la interacción entre quarks en las masas de los hadrones. Este procedimiento da un valor para la masa que es dependiente del modelo, y es tanto más impreciso cuanto menor sea la masa del quark. Así, se obtiene:

	Carga	Masa(GeV)
u	2/3	0.0015-0.005
d	-1/3	0.002-0.006
s	-1/3	0.060-0.170
c	2/3	1.1-1.4
b	-1/3	4.1-4.4
t	2/3	174.3 ± 5.1

Estas masas son diferentes de las masas “constituyentes”, que incorporan el efecto de la energía cinética y potencial, y por tanto dependen del hadrón. Las masas “constituyentes” de los quarks u y d serían de unos 0.3 GeV en el nucleón, pero de unos 0.07 GeV en el pión.

9.4 Evidencias experimentales de los quarks

Los quarks no se han detectado nunca aislados, y existen argumentos teóricos para que esto sea así. Es el llamado “confinamiento”, que hace que cualquier combinación de colores, diferente de la totalmente antisimétrica, tenga una energía infinita. No obstante, existen evidencias experimentales indirectas, basadas en colisiones de leptones a alta energía, que avalan su existencia.

9.4.1 Experimentos de análisis

Son experimentos en los que se dispersa una partícula muy energética con energía E , típicamente un electrón, por un protón o un neutrón. Se observa el electrón saliente con energía $E' < E$, y a partir de éste se infiere la energía y el momento que se ha transferido al nucleón. Este proceso se analiza considerando que el nucleón está compuesto por una serie de fragmentos (partones) que interactúan individualmente con el electrón. El objetivo del análisis es obtener las propiedades de estos partones, y su distribución de momentos dentro del nucleón.

La sección eficaz para cada proceso de dispersión depende por tanto de la energía y el momento transferido, y puede expresarse en función de dos funciones de estructura (tres en el caso de dispersión de neutrinos), que contienen la información sobre la estructura del nucleón.

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Mott} \frac{E'}{E(E-E')} \left(F_2(x, Q^2) + \frac{2(E-E')}{M} F_1(x, Q^2) \tan^2(\theta/2) \right).$$

Es conveniente expresar las funciones de estructura en términos del momento transferido Q^2 y de la variable de Bjorken, que viene dada por $x = Q^2/2M(E-E')$. El significado de dicha variable, que toma valores entre 0 y 1, es la fracción de momento del nucleón que tiene el partón que ha interactuado con el nucleón.

Los resultados experimentales indican que, para valores de $Q^2 > 1(\text{GeV}/c)^2$, las funciones de estructura $F_2(x, Q^2)$ y $F_1(x, Q^2)$ sólo dependen de x . Esto es lo que se llama **invariancia de escala**, y se interpreta como que los partones son partículas elementales, sin estructura interna.

Por otro lado, se encuentra que las funciones de estructura cumplen la relación de Callan-Gross, por la que $F_2(x) = 2xF_1(x)$. Ello implica que los partones son partículas de espín 1/2 que obedecen la ecuación de Dirac.

Los experimentos de dispersión de electrones no son capaces de determinar si el partón corresponde a un quark o a un antiquark, ya que las secciones eficaces dependen del cuadrado de la carga eléctrica. No obstante, la dispersión de neutrinos para dar leptones sí permite esa diferenciación, ya que, por ejemplo, puede ocurrir $\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u$ pero no $\nu_\mu \bar{d} \rightarrow \mu^- \bar{u}$. Del análisis de estos experimentos se encuentra que para valores de x pequeña, existen en los nucleones una fracción importante de antiquarks, pero para valores de x mayores predominan los quarks. Puede evaluarse una regla de suma, que corresponde a la integral para todos los valores de x , que indica que el número de quarks menos el número de antiquarks es consistente con 3 (Dos medidas dieron 3.2 ± 0.5 y 2.8 ± 0.6).

Por otro lado, si se integra el valor del momento de todos los partones, no se obtiene el momento total del nucleón. Ello lleva a considerar que existen componentes en el nucleón que no interactúan con los electrones o los neutrinos, pero que contribuyen al momento total. Estos son precisamente los gluones que son las partículas intermediarias de la interacción fuerte, pero que no tienen carga eléctrica ni débil.

9.4.2 Experimentos de síntesis

En la colisión de un electrón y un positrón a alta energía, se producen muchas partículas. No obstante, podemos separar los sucesos en los que se producen leptones, como $\mu^+\mu^-$, y los procesos en los que se producen hadrones. En ambos casos, e^+ y e^- se aniquilan para producir un fotón virtual. Este fotón puede producir $\mu^+\mu^-$, o bien producir $q\bar{q}$, en cuyo caso se observarán hadrones. El cociente R entre la probabilidad de producir hadrones y la probabilidad de producir $\mu^+\mu^-$ es igual a la suma de los cuadrados de las cargas eléctricas de los quarks que pueden producirse. Así, para energías superiores a 10 GeV, pueden producirse parejas quark-antiquark de los quarks u,d,s,c,b. Además, hay que considerar que existen tres tipos de colores para cada quark, con lo que $R=11/3$. Un cálculo más detallado de R debe tener en cuenta que también existen en las que e^+ y e^- de aniquilan por interacción débil dando lugar a una Z^0 , que se desintegra en quarks o leptones. Por otro lado, la interacción fuerte entre q y \bar{q} afecta el valor de R .

Los procesos descritos anteriormente se basan en el análisis de las secciones eficaces totales de distintas colisiones. No obstante, las propiedades de los quarks pueden estudiarse en mayor detalle ya que, en los procesos de colisión a altas energías, se producen chorros de partículas que se mueven en la misma dirección. Estos chorros de partículas provienen de un proceso elemental en el que se producen quarks (o gluones) a energías altas. El momento total de las partículas del chorro está relacionado con el momento que tenía originalmente el quark. Los procesos más importantes son los de dos jets, en los que se considera que se ha producido una pareja $q\bar{q}$, y los de tres jets, en los que se produce además un gluón. Las correlaciones angulares en estos sucesos de tres jets confirman que el espín del gluón es 1.

9.5 Problemas

1) Considera un modelo en el que la masa de los bariones del octete fundamental se expresa como suma de las masas de los quarks constituyentes. En él, el residual R^2 se define como la suma, para todos los bariones, de la diferencia de la masa real del barión menos la masa de los quarks que lo componen, elevada al cuadrado.

a) Obtener las masas de estos quarks por mínimos cuadrados, es decir, minimizando R^2 . Comparar las masas obtenidas para los bariones con las reales.

b) Obtener las masas de los quarks por el mismo procedimiento a partir de las masas del decuplete. Comparar con los resultados anteriores.

c) Obtener las masas de los quarks a partir de las masas de los piones y los kaones, considerando que la masa de los anti-quarks deben ser las mismas que las de los quarks.

2) Teniendo en cuenta que un protón tiene un radio cuadrático medio de 0.8 fm, estimar el valor del cuadrado del momento lineal de los quarks dentro de los bariones. Considerando que los valores obtenidos en 1a) para las masas de los quarks corresponden a la energía total de los quarks, obtener qué energía tendrían si estuvieran en reposo. Obtener la energía cinética de los quarks en los bariones. Discutir la validez de la aproximación no relativista.

3) Obtener la función de onda de espín-sabor de los bariones del decuplete. Obtener el valor de su momento magnético.

4) Obtener la función de onda de espín-sabor de los bariones del octete. Obtener el valor de su momento magnético. Nota: Los quarks u y d en la Λ se acoplan a isospín cero, por lo que su función de onda de sabor es antisimétrica. Los quarks u y d en la Σ^0 se acoplan a isospín uno, por lo que su función de onda de sabor es simétrica.

5) Obtener los valores admisibles de los tableros de Young que caracterizan la simetría de las funciones de onda correspondientes a las variables orbitales, de espín y de sabor para los quarks en un barión, compatibles con el principio de Pauli, y teniendo en cuenta que la función de onda de color es totalmente antisimétrica.

6) En un modelo de oscilador armónico para los quarks en un barión, la función de onda orbital de energía más baja tiene simetría [3], $L=0$ y paridad positiva. A partir de los resultados del problema anterior, comprobar que los bariones compatibles con esta función de onda orbital son un octete con $J = 1/2^+$ y un decuplete con $J = 3/2^+$.

La función de onda orbital siguiente, con energía de excitación $\hbar\omega$, tiene simetría [2,1], $L=1$ y paridad negativa. Obtener los bariones compatibles con esta función de onda, especificando el multiplete, L , S , J y la paridad.

Chapter 10

Teorías Gauge Locales

10.1 Estructura general de las teorías gauge locales

En general, la teoría cuántica de campos describe la interacción entre fermiones mediante el acoplamiento de los campos fermiónicos con campos bosónicos. La forma de estos acoplamientos, así como la estructura de los lagrangianos que describen a los bosones y fermiones por separado, es en general arbitraria, y sólo está sujeta a que la densidad lagrangiana debe ser invariante de Lorentz. No obstante, estas teorías no son renormalizables en general.

Las teorías gauge locales forman una clase muy especial de las teorías cuánticas de campos, que permiten obtener la forma del lagrangiano que describe la interacción entre fermiones, a partir de las propiedades de simetría de estos fermiones. Se ha demostrado que las teorías gauge locales son renormalizables. El procedimiento para construir estas teorías es el siguiente:

- Se parte de la densidad lagrangiana que describe a los fermiones sin interacción. En general, se consideran varios fermiones de espín $1/2$ con la misma masa.
- Se considera una magnitud conservada (carga eléctrica, color, etc). Los operadores asociados a esta magnitud generan un grupo de transformaciones. Los campos fermiónicos constituyen la base de una representación (generalmente, pero no siempre, la representación fundamental) del grupo. Las transformaciones del grupo vienen caracterizados por una serie de parámetros. Cuando éstos parámetros son independientes de las coordenadas y el tiempo, la densidad lagrangiana de los fermiones sin interacción es invariante frente a las transformaciones del grupo. Estas transformaciones se denominan transformaciones gauge globales.
- Se consideran ahora las transformaciones en las que los parámetros dependen de forma arbitraria de las coordenadas y el tiempo. En este caso, la densidad lagrangiana de los fermiones sin interacción no es invariante frente a las transformaciones del grupo. Estas transformaciones se denominan transformaciones gauge locales.
- Se busca una modificación de la densidad lagrangiana que haga que la densidad lagrangiana modificada sea invariante frente a las transformaciones gauge locales. Para ello, se modifica el operador derivada añadiéndole la suma de los generadores del grupo por unos campos gauge, tanto como generadores, multiplicados por una

constante de acoplo, que es el único parámetro de la teoría. Estos campos gauge se transforman frente a transformaciones gauge locales de forma que hacen que la densidad lagrangiana modificado sea invariante frente a transformaciones gauge locales. Por otro lado, para que la densidad lagrangiana modificada sea invariante frente a transformaciones de Lorentz, los campos gauge deben comportarse como el operador derivada, por lo que son cuadvectores.

- Se considera que los campos gauge introducidos llevan asociados bosones de espín uno que transmiten la interacción entre los fermiones. Se construye una densidad lagrangiana para los campos gauge con la exigencia de que esta densidad lagrangiana sea invariante gauge local, e invariante de Lorentz. Se encuentra que este lagrangiano no puede tener términos cuadráticos en los campos gauge, por lo que los bosones gauge tienen masa nula. No obstante, sí pueden aparecer términos de interacción entre los campos gauge, que dependen de las constantes de estructura del grupo.

Las teorías gauge locales surgen del requerimiento de que la densidad lagrangiana sea invariante frente a transformaciones gauge locales. Este requerimiento no es arbitrario. Proviene del concepto relativista de que lo que se haga en una region A del espacio-tiempo, que está separada espacialmente de otra región B, no debe afectar a ésta última. Por ejemplo, lo que se haga en el sol no puede afectarnos a nosotros en la tierra instantáneamente, aunque sí nos afectará pasados 8 minutos. Las transformaciones gauge globales implican que, para dejar invariante la densidad lagrangiana, los parámetros que definen la transformación en todos los puntos del espacio y en todos los instantes de tiempo deben ser los mismos. Por tanto, la misma transformación debería realizarse en el sol y en la tierra. Las transformaciones gauge locales permiten que los parámetros que definen la transformación en A sean independientes de los de B, lo cual permite realizar una cierta transformación gauge en el sol, pero no en la tierra, en un instante dado. No obstante, al realizar la transformación gauge local se genera unos campos gauge en el sol, que se propaga hacia la tierra a la velocidad igual de la luz, (ya que las partículas asociadas a los campos gauge tienen masa nula), con lo cual, pasados ocho minutos, la presencia del campo gauge en la tierra nos da cuenta de la transformación gauge local realizada en el sol.

Así, las teorías gauge locales describen la interacción entre fermiones, mediante el intercambio de bosones de espín 1 con masas (en principio) nulas. Este esquema es directamente válido para describir la interacción electromagnética y la interacción fuerte entre los quarks. El mecanismo de ruptura espontánea de la simetría permite describir también interacciones producidas por bosones con masa no nula, con lo que también se describe la interacción débil.

10.2 Electrodinámica cuántica: grupo U(1)

Consideremos un fermión de espín 1/2. Su densidad lagrangiana sin interacción es:

$$\mathcal{L}^{F0} = -\bar{\psi}(x)(\gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)\psi(x)$$

Consideremos las transformaciones del grupo U(1) dadas por el operador

$$T(\Lambda) = \exp(ieQ\Lambda)$$

e es una constante arbitraria. Λ es un parámetro que toma valores entre 0 y $2\pi/e$. Q es el generador del grupo, que toma valores enteros, y que asociaremos con la carga eléctrica en unidades de la carga del electrón. Frente a las transformaciones del grupo, si el fermión es autoestado de Q correspondiente al autovalor q , el campo se transforma según:

$$\psi(x) \rightarrow \exp(ieQ\Lambda)\psi(x) \exp(-ieQ\Lambda) = \exp(-ieq\Lambda)\psi(x)$$

Esta expresión se obtiene porque $\psi(x)$ es proporcional a operadores que aniquilan un fermión, o crean un anti-fermión, por los que el operador Q de la derecha actúa sobre estados con carga superior en q unidades al de la izquierda. Análogamente,

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \exp(ieQ\Lambda)\bar{\psi}(x) \exp(-ieQ\Lambda) = \exp(ieq\Lambda)\bar{\psi}(x)$$

Puede verse que si Λ no depende de x , entonces \mathcal{L}^0 es invariante frente a las transformaciones del grupo. Estas transformaciones están asociadas a la conservación de Q .

Vamos a considerar ahora que permitimos que Λ sea una función arbitraria de x . Entonces, frente a las transformaciones del grupo, la densidad lagrangiana se transforma según

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{F0} &\rightarrow -\bar{\psi}(x) \exp(ieq\Lambda(x))(\gamma_\mu \partial_\mu + m) \exp(-ieq\Lambda(x))\psi(x) \\ &\rightarrow \mathcal{L}^{F0} + ej_\mu(x)\partial_\mu\Lambda(x) \end{aligned}$$

donde el operador corriente $j_\mu(x)$ viene dado por

$$j_\mu(x) = iq\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

Vemos que la densidad lagrangiana \mathcal{L}^{F0} no es invariante frente a las transformaciones gauge locales, pero sí frente a las globales. Vamos a modificar el lagrangiano \mathcal{L}^{F0} para que sea invariante frente a transformaciones gauge locales. Para ello, modificamos el operador derivada, definiendo una derivada modificada

$$D_\mu = \partial_\mu - ieQA_\mu(x)$$

donde $A_\mu(x)$ es el campo gauge. El lagrangiano modificado resulta

$$\mathcal{L}^F = -\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi(x) = \mathcal{L}^{F0} + ej_\mu(x)A_\mu(x)$$

Frente a transformaciones gauge locales, la corriente j_μ no se modifica, y se exige que el campo gauge se modifique de forma que:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x).$$

Por tanto, puede verse que el lagrangiano modificado es invariante frente a transformaciones gauge locales. El “precio” que hay que pagar es la introducción de la interacción con un campo $A_\mu(x)$. Esta interacción es formalmente idéntica a la interacción electromagnética.

El campo gauge $A_\mu(x)$ lleva asociado un bosón gauge, que tiene una entidad física, independiente de los fermiones. Por tanto, debe existir un lagrangiano que describa la evolución de los bosones gauge, en ausencia de fermiones. Este lagrangiano debe ser

invariante de Lorentz, pero también debe ser invariante gauge local. Teniendo en cuenta la forma en la que se modifica el campo $A_\mu(x)$ frente a transformaciones gauge locales, es evidente que el rotacional

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

es invariante frente a transformaciones gauge locales. Nótese que puede escribirse

$$D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = -ieQF_{\mu\nu}(x)$$

A partir del rotacional, la densidad lagrangiana más simple que puede construirse de forma que sea invariante de Lorentz es:

$$\mathcal{L}^A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)$$

El factor $-1/4$ es una normalización arbitraria que se introduce para obtener la expresión habitual del lagrangiano del campo electromagnético. Cualquier otro factor podría englobarse en la definición de A_μ , cambiando el valor de la constante de acople e .

En resumen, obtenemos que el lagrangiano asociado a una teoría gauge local del grupo $U(1)$ viene dado por

$$\mathcal{L}^{U(1)} = \mathcal{L}^F + \mathcal{L}^A = \mathcal{L}^{F0} + \mathcal{L}^{FA} + \mathcal{L}^A$$

donde \mathcal{L}^{F0} es el lagrangiano de los fermiones sin interacción, $\mathcal{L}^{FA} = e j_\mu(x)A_\mu(x)$ describe la interacción de los fermiones con los bosones gauge, y \mathcal{L}^A es el lagrangiano de los bosones gauge. Aparece un único campo $A_\mu(x)$, con lo cual hay sólo un bosón gauge. Como el campo $A_\mu(x)$ es un cuadvivector, el bosón gauge tiene espín uno. Como en \mathcal{L}^A no aparecen términos del tipo $m_A^2 A_\mu(x)A_\mu(x)$, la masa del bosón gauge es cero. La constante e indica la intensidad del acoplamiento entre las corrientes fermiónicas y el campo $A_\mu(x)$. Finalmente, no aparecen términos cúbicos o de orden superior en $A_\mu(x)$, lo cual indica que los bosones gauge no interactúan entre sí. Todas estas propiedades son las que tiene el fotón, como partícula responsable de la interacción electromagnética. Por tanto, vemos que la interacción electromagnética puede obtenerse sin más que exigir que el lagrangiano sea invariante frente a las transformaciones gauge locales cuyo generador es el operador carga eléctrica.

El único parámetro de la teoría es el valor de la constante e . Esta “constante”, debido al efecto de la renormalización, toma valores efectivos que dependen de la energía. A energías bajas, del orden del MeV, la constante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = 1/137.03599976$, con lo cual $e = 0.30282$. Sin embargo, a energías del orden de la masa de la Z^0 (90 GeV), $\alpha = 1/127.934$, con lo que $e = 0.31341$. Vemos que e aumenta conforme aumenta la energía, lo cual implica que disminuye conforme aumenta la distancia. Este efecto es el apantallamiento debido a la polarización del vacío por la creación de parejas virtuales fermión-antifermión,

10.3 Cromodinámica cuántica: grupo $SU(3)$

Consideremos la densidad lagrangiana que describe los quarks de un sabor determinado, con los tres colores (r, v, a), correspondientes a los índices $i = 1, 2, 3$, sin considerar su interacción.

$$\mathcal{L}^{F0} = -\sum_i \bar{\psi}_i(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_i(x)$$

vamos a considerar las transformaciones del grupo $SU(3)$ de color. Estas transformaciones vienen dadas, para valores pequeños de los 8 parámetros Λ_a , $a = 1, 8$, en función de los generadores X_a , por

$$T(\Lambda_a) = I + ig_s \sum_a X_a \Lambda_a$$

Donde g_s es una constante arbitraria. Frente a las transformaciones del grupo, los generadores se modifican según

$$X_b \rightarrow T(\Lambda_a) X_b T^+(\Lambda_a) = X_b - g_s \sum_{ac} f_{ab}^c \Lambda_a X_c$$

donde f_{bc}^a son las constantes de estructura, definidas por

$$[X_a, X_b] = i \sum_c f_{ab}^c X_c.$$

Como los quarks de los tres colores generan la representación fundamental del grupo $SU(3)$, los operadores $\psi_i(x)$ y $\bar{\psi}_i(x)$ se transforman según las matrices de Gell-Mann $(\lambda_a)_{ij}$

$$\psi_i(x) \rightarrow \psi_i(x) - ig_s \sum_a \Lambda_a \sum_j (\lambda_a)_{ij} \psi_j(x)$$

$$\bar{\psi}_i(x) \rightarrow \bar{\psi}_i(x) + ig_s \sum_a \Lambda_a \sum_j (\lambda_a)_{ji} \bar{\psi}_j(x)$$

Puede verse que si Λ_a no dependen de x , entonces \mathcal{L}^0 es invariante frente a las transformaciones del grupo. Estas transformaciones están asociadas a la conservación de los tres tipos (o las tres “cargas”) de color.

Vamos a considerar ahora que permitimos que Λ sea una función arbitraria de x . Entonces, frente a las transformaciones del grupo, la densidad lagrangiana se transforma según

$$\mathcal{L}^{F0} \rightarrow \mathcal{L}^{F0} + g_s \sum_a j_\mu^a(x) \partial_\mu \Lambda_a(x)$$

donde el operador corriente $j_\mu^a(x)$ viene dado por

$$j_\mu^a(x) = i \sum_{ij} \bar{\psi}_i(x) \gamma_\mu \psi_j(x) (\lambda_a)_{ij}$$

Vemos que la densidad lagrangiana \mathcal{L}^0 no es invariante frente a las transformaciones gauge locales (Λ_a depende de x), pero sí frente a las globales (Λ_a no depende de x). Vamos a modificar el lagrangiano \mathcal{L}^0 para que sea invariante frente a transformaciones gauge locales. Para ello, modificamos el operador derivada, definiendo una derivada modificada

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s \sum_a X_a A_\mu^a(x)$$

donde $A_\mu^a(x)$ son los campos gauge. Hay tantos como generadores, ocho en este caso. El lagrangiano modificado resulta

$$\mathcal{L}^F = \mathcal{L}^{F0} + g_s \sum_a j_\mu^a(x) A_\mu^a(x)$$

Frente a transformaciones gauge locales, la corriente j_μ^a se modifica, de forma que

$$j_\mu^a(x) \rightarrow j_\mu^a - g_s \sum_{bc} f_{ca}^b j_\mu^b(x) \Lambda_c(x)$$

Esta expresión es la que define la transformación de los generadores del grupo X_a . Puede verse que, de la misma forma que $\sum_a X_a X_a$ es invariante frente a las transformaciones del grupo, lo mismo ocurre a cualquier magnitud que se transforme según la expresión anterior. Para que el lagrangiano modificado sea invariante, se exige que los campos gauge se modifiquen de forma que:

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) - \partial_\mu \Lambda_a(x) - g_s \sum_{bc} f_{ca}^b A_\mu^b(x) \Lambda_c(x).$$

La primera parte de esta expresión es análoga a la transformación del campo deducido del grupo $U(1)$, y está relacionada con la variación de los parámetros de la transformación. La segunda parte compensa la variación de las corrientes $j_\mu^a(x)$, y aparece también en transformaciones gauge globales. Por tanto, puede verse que el lagrangiano modificado es invariante frente a transformaciones gauge locales. El “precio” que hay que pagar es la introducción de la interacción con ocho campos $A_\mu^a(x)$.

Los campos $A_\mu^a(x)$ llevan asociados ocho bosones gauge, llamados gluones, que tienen una entidad física, independiente de los quarks. Por tanto, debe existir un lagrangiano que describa la evolución de los gluones, en ausencia de quarks. Este lagrangiano debe ser invariante de Lorentz, pero también debe ser invariante gauge local. Teniendo en cuenta la forma en la que se modifican los campos $A_\mu^a(x)$ frente a transformaciones gauge locales, los rotacionales pueden obtenerse de la expresión

$$D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = -ig_s \sum_a X_a F_{\mu\nu}^a$$

resultando:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g_s \sum_{bc} f_{bc}^a A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)$$

Los rotacionales se transforman como los generadores del grupo X_a :

$$F_{\mu\nu}^a(x) \rightarrow F_{\mu\nu}^a(x) - g_s \sum_{cb} f_{ca}^b F_{\mu\nu}^b(x) \Lambda_c(x).$$

Por tanto, la expresión

$$\sum_a F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x)$$

es invariante frente a transformaciones gauge locales. La densidad lagrangiana más simple que puede construirse de forma que sea invariante de Lorentz es:

$$\mathcal{L}^A = -\frac{1}{4} \sum_a F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x)$$

En el lagrangiano \mathcal{L}^A de los bosones gauge podemos distinguir un término \mathcal{L}^{A0} , que corresponde a bosones sin interacción, dado por

$$\mathcal{L}^{A0} = -\frac{1}{4} \sum_a (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x))^2$$

y un término \mathcal{L}^{AI} , que describe la interacción entre los bosones gauge, dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{AI} &= \frac{g_s}{2} \sum_{abc} f_{bc}^a (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)) A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \\ &+ \frac{g_s^2}{4} \sum_a \left(\sum_{bc} f_{bc}^a A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \right)^2\end{aligned}$$

En resumen, obtenemos que el lagrangiano asociado a una teoría gauge local del grupo SU(3) viene dado por

$$\mathcal{L}^{SU(3)} = \mathcal{L}^F + \mathcal{L}^A = \mathcal{L}^{F0} + \mathcal{L}^{FA} + \mathcal{L}^{A0} + \mathcal{L}^{AI}$$

donde \mathcal{L}^{F0} es el lagrangiano de los fermiones sin interacción, $\mathcal{L}^{FA} = g_s \sum_a j_\mu^a(x) A_\mu^a(x)$ describe la interacción de los fermiones con los bosones gauge, \mathcal{L}^{A0} es el lagrangiano de los bosones gauge sin interacción y \mathcal{L}^{AI} es el lagrangiano que describe la interacción de los bosones gauge.

Aparecen ocho campos $A_\mu^a(x)$, con lo cual hay ocho bosones gauge. Como el campo $A_\mu^a(x)$ es un cuadrivector, los bosones gauge tienen espín uno. Como en \mathcal{L}^{A0} no aparecen términos del tipo $m_A^2 A_\mu^a(x) A_\mu^a(x)$, la masa del bosón gauge es cero. La constante g_s , junto con las matrices $(\lambda_a)_{ij}$, indican la intensidad del acoplamiento entre las corrientes fermiónicas y el campo $A_\mu^a(x)$.

Vemos que los gluones interactúan entre sí. Este hecho es responsable de que la interacción entre dos quarks aumente conforme éstos se separan. Es el fenómeno conocido como anti-apantallamiento. Ello provoca que los quarks, o en general cualquier sistema que no sea invariante frente a transformaciones del grupo SU(3) de color, no pueda encontrarse aislado en la naturaleza.

El único parámetro de la teoría es el valor de la constante g_s . Esta “constante”, debido al efecto de la renormalización, toma valores efectivos que dependen de la energía. A energías bajas, del orden del MeV, la constante $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ se hace comparable con la unidad, con lo que su valor no puede determinarse con precisión por procedimientos perturbativos. A energías del orden de la masa de la partícula τ (1.777 GeV), $\alpha_s \simeq 0.35$, con lo cual $g_s \simeq 2.1$. Sin embargo, a energías del orden de la masa de la Z^0 (90 GeV), $\alpha_s = 0.1181$, con lo que $g_s = 1.218$. El hecho de que la constante g_s aumente su valor conforme disminuye la energía está relacionado con que la interacción fuerte aumenta conforme aumenta la distancia de las partículas coloreadas. Esto lleva al confinamiento del color.

10.4 Teoría preliminar para la interacción electro-débil: grupo U(2)

Consideremos las parejas de los leptones $\nu_e - e$, $\nu_\mu - \mu$, $\nu_\tau - \tau$, y las de los quarks $u - d'$, $c - s'$ y $t - b'$. La interacción débil entre estos fermiones es idéntica. Para describirla, vamos a ignorar, en principio, la diferencia de masas entre las partículas de una pareja, y vamos a considerar dos campos fermiónicos $\psi_i(x)$, $i = 1, 2$, que describen una pareja de las anteriores, por ejemplo, $e - \nu_e$.

La densidad lagrangiana sin considerar su interacción es:

$$\mathcal{L}^{F0} = - \sum_i \bar{\psi}_i(x) (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi_i(x)$$

Vamos a considerar las transformaciones unitarias que cambian los fermiones 1 y 2 en una combinación de ellos. Estas transformaciones están asociadas a la conservación del “Isospín débil”, \mathbf{I}^w , análogo al isospín, y a la “hipercarga débil”, Y^w . La carga eléctrica está relacionada con la tercera componente del isospín, por la relación de Gell-Mann y Nishijima, $Q = I_3^w + Y^w/2$, siendo la Y^w un operador diagonal cuyo valor es -1 para los leptones y 1/3 para los quarks. El grupo relevante es el U(2). Estas transformaciones vienen dadas, para valores pequeños de los 4 parámetros Λ_a , $a = 1, 2, 3$, y Λ' , en función de los generadores I_a^w y Y^w , por

$$T(\Lambda_a) = I + ig \sum_a I_a^w \Lambda_a + ig'(Y^w/2)\Lambda'$$

Donde g y g' son dos constantes arbitrarias. Las transformaciones del grupo dejan invariante a Y^w , y transforman a I_b^w según

$$I_b^w \rightarrow T(\Lambda_a)I_b^w T^+(\Lambda_a) = I_b^w - g \sum_{ac} e_{cab} \Lambda_a I_c^w$$

donde e_{cab} es el tensor totalmente antisimétrico que define las constantes de estructura del grupo SU(2):

$$[I_a^w, I_b^w] = i \sum_c e_{cab} I_c^w.$$

Como los fermiones 1 y 2 generan la representación fundamental del grupo U(2), los operadores $\psi_i(x)$ y $\bar{\psi}_i(x)$ se transforman según las matrices de Pauli $\sigma_a/2$:

$$\psi_i(x) \rightarrow \psi_i(x) - ig \sum_a \Lambda_a \sum_j (\sigma_a/2)_{ij} \psi_j(x) - ig'(Y^w/2)_{ii} \Lambda' \psi_i(x)$$

$$\bar{\psi}_i(x) \rightarrow \bar{\psi}_i(x) + ig \sum_a \Lambda_a \sum_j (\sigma_a/2)_{ji} \bar{\psi}_j(x) + ig'(Y^w/2)_{ii} \Lambda' \bar{\psi}_i(x)$$

Vamos a considerar ahora que permitimos que Λ sea una función arbitraria de x . Entonces, frente a las transformaciones del grupo, la densidad lagrangiana se transforma según

$$\mathcal{L}^{F0} \rightarrow \mathcal{L}^{F0} + g \sum_a j_\mu^a(x) \partial_\mu \Lambda_a(x) + g' j'_\mu(x) \partial_\mu \Lambda'(x)$$

donde los operadores corriente vienen dados por

$$j_\mu^a(x) = i \sum_{ij} \bar{\psi}_i(x) \gamma_\mu \psi_j(x) (\sigma_a/2)_{ij}$$

$$j'_\mu(x) = i \sum_i \bar{\psi}_i(x) \gamma_\mu \psi_i(x) (Y^w/2)_{ii}$$

Vemos que la densidad lagrangiana \mathcal{L}^{F0} no es invariante frente a las transformaciones gauge locales (Λ dependen de x), pero sí frente a las globales (Λ no dependen de x). Vamos a modificar el lagrangiano \mathcal{L}^{F0} para que sea invariante frente a transformaciones gauge locales. Para ello, modificamos el operador derivada, definiendo una derivada modificada

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \sum_a I_a^w B_\mu^a(x) - ig' Y^w/2 C_\mu(x)$$

donde $B_\mu^a(x)$ y $C_\mu(x)$ son los campos gauge. Hay tantos como generadores, cuatro en este caso. El lagrangiano modificado resulta

$$\mathcal{L}^F = \mathcal{L}^{F0} + g \sum_a j_\mu^a(x) B_\mu^a(x) + g' j'_\mu(x) C_\mu(x)$$

Frente a transformaciones gauge locales, la corriente j'_μ no varía, pero j_μ^a se transforma como los generadores I_a^w :

$$j_\mu^a(x) \rightarrow j_\mu^a - g \sum_{bc} e_{bca} j_\mu^b(x) \Lambda_c(x)$$

Puede verse que, de la misma forma que $\sum_a I_a^w I_a^w$ es invariante frente a las transformaciones del grupo, lo mismo ocurre a cualquier magnitud que se transforme según la expresión anterior.

Para que el lagrangiano modificado sea invariante, se exige que los campos gauge se modifiquen de forma que:

$$\begin{aligned} B_\mu^a(x) &\rightarrow B_\mu^a(x) - \partial_\mu \Lambda_a(x) - g \sum_{bc} e_{bca} B_\mu^b(x) \Lambda_c(x) \\ C_\mu(x) &\rightarrow C_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda'(x) \end{aligned}$$

La primera parte de estas expresiones es análoga a la transformación del campo deducido del grupo U(1), y está relacionada con la variación de los parámetros de la transformación. La segunda parte compensa la variación de las corrientes $j_\mu^a(x)$, y aparece también en transformaciones gauge globales. Por tanto, puede verse que el lagrangiano modificado es invariante frente a transformaciones gauge locales. El “precio” que hay que pagar es la introducción de la interacción con cuatro campos $B_\mu^a(x)$ y $C_\mu(x)$.

Los campos $B_\mu^a(x)$ y $C_\mu(x)$ llevan asociados cuatro bosones gauge, que tienen una entidad física, independiente de los fermiones. Teniendo en cuenta la forma en la que se modifican los campos $B_\mu^a(x)$ y $C_\mu(x)$ frente a transformaciones gauge locales, los rotacionales pueden definirse a partir de la expresión

$$D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = -ig \sum_a I_a^w F_{\mu\nu}^a - ig'(Y^w/2) F'_{\mu\nu}$$

resultando:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a(x) &= \partial_\mu B_\nu^a(x) - \partial_\nu B_\mu^a(x) + g \sum_{bc} e_{abc} B_\mu^b(x) B_\nu^c(x) \\ F'_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu C_\nu(x) - \partial_\nu C_\mu(x) \end{aligned}$$

$F'_{\mu\nu}(x)$ es invariante frente a transformaciones gauge locales, mientras que $F_{\mu,\nu}^a(x)$ se transforman como los generadores I_a^w , según la relación

$$F_{\mu\nu}^a(x) \rightarrow F_{\mu\nu}^a(x) - g \sum_{bc} e_{bac} F_{\mu,\nu}^b(x) \Lambda_c(x).$$

La densidad lagrangiana más simple que puede construirse de forma que sea invariante gauge local e invariante de Lorentz es:

$$\mathcal{L}^A = -\frac{1}{4} \sum_a F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu}(x) F'_{\mu\nu}(x).$$

A partir de los campos $B_\mu^1(x)$ y $B_\mu^2(x)$, pueden definirse dos campos conjugados

$$W_\mu(x) = \frac{B_\mu^1(x) + iB_\mu^2(x)}{\sqrt{2}} \quad ; \quad W_\mu^*(x) = \frac{B_\mu^1(x) - iB_\mu^2(x)}{\sqrt{2}}$$

Estos campos están acoplados a corrientes fermiónicas en las que el isospín débil (y, por tanto, la carga eléctrica), aumenta o disminuye en una unidad. Por tanto, corresponden, respectivamente, a los bosones vectoriales intermedios W^- y W^+ . El campo $B_\mu^3(x)$ y el campo $C_\mu(x)$ pueden combinarse para dar los campos

$$A_\mu(x) = \sin \theta_w B_\mu^3(x) + \cos \theta_w C_\mu(x) \quad ; \quad Z_\mu(x) = \cos \theta_w B_\mu^3(x) - \sin \theta_w C_\mu(x)$$

donde θ_w es el ángulo de Weinberg, definido por $\sin \theta_w = g'/\sqrt{g^2 + g'^2}$. El acoplamiento del campo $A_\mu(x)$ con los fermiones viene caracterizado por el operador $Q = I_3^w + Y^w/2$, que es la carga eléctrica. Por tanto, podemos asociar $A_\mu(x)$ al campo electromagnético e identificar su constante de acoplo, $g \sin \theta_w$ con e . El campo $A_\mu(x)$ lleva asociado al fotón γ . El campo $Z_\mu(x)$ correspondería un bosón Z^0 que se acopla a las corrientes débiles neutras. En términos de estos campos, la derivada modificada resulta, llamando $I_\pm^w = I_1^w \pm iI_2^w$, y $Q = I_3^w - Y^w/2$,

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}I_+^w W_\mu(x) - i\frac{g}{\sqrt{2}}I_-^w W_\mu^*(x) \\ &\quad - i\frac{g}{\cos \theta_w}(\cos^2 \theta_w I_3^w - \sin^2 \theta_w Y^w/2)Z_\mu(x) - ieQA_\mu(x) \end{aligned}$$

y la interacción de los fermiones con los campos gauge viene dada por

$$\mathcal{L}^{FA} = \frac{g}{\sqrt{2}}j_\mu^{w+}(x)W_\mu(x) + \frac{g}{\sqrt{2}}j_\mu^{w-}(x)W_\mu^*(x) + \frac{g}{\cos \theta_w}j_\mu^{w0}(x)Z_\mu(x) + ej_\mu^{el}(x)A_\mu(x)$$

donde

$$\begin{aligned} j_\mu^{w+}(x) &= i\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x) \\ j_\mu^{w-}(x) &= i\bar{\psi}_2(x)\gamma_\mu\psi_1(x) \\ j_\mu^{w0}(x) &= i\sum_i\bar{\psi}_i(x)\gamma_\mu\psi_i(x)(\cos^2 \theta_w(I_3^w)_{ii} - \sin^2 \theta_w(Y^w/2)_{ii}) \\ j_\mu^{el}(x) &= i\sum_i\bar{\psi}_i(x)\gamma_\mu\psi_i(x)Q_{ii} \end{aligned}$$

El lagrangiano que describe la evolución de los bosones W^- , W^+ , Z^0 y γ , en ausencia de fermiones, es \mathcal{L}^A , expresado en función de los campos W_μ , W_μ^* , A_μ y Z^0 . En él podemos distinguir un término \mathcal{L}^{A0} , que corresponde a bosones sin interacción,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{A0} &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu W_\nu^*(x) - \partial_\nu W_\mu^*(x))(\partial_\mu W_\nu(x) - \partial_\nu W_\mu(x)) \\ &\quad - \frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu(x) - \partial_\nu Z_\mu(x))^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))^2 \end{aligned}$$

y un término \mathcal{L}^{AI} , que describe la interacción entre los bosones gauge, en las que aparecen interacciones entre los campos $W_\mu(x)$, $W_\mu^*(x)$, $Z_\mu(x)$ y $A_\mu(x)$.

En resumen, obtenemos que el lagrangiano asociado a una teoría gauge local del grupo $U(2)$ viene dado por

$$\mathcal{L}^{U(2)} = \mathcal{L}^F + \mathcal{L}^A = \mathcal{L}^{F0} + \mathcal{L}^{FA} + \mathcal{L}^{A0} + \mathcal{L}^{AI}$$

donde \mathcal{L}^{F0} es el lagrangiano de los fermiones sin interacción, \mathcal{L}^{FA} describe la interacción de los fermiones con los bosones gauge, \mathcal{L}^{A0} es el lagrangiano de los bosones gauge sin interacción y \mathcal{L}^{AI} es el lagrangiano de interacción de los bosones gauge.

Esta teoría engloba la interacción electromagnética, y describe algunos de los aspectos de la interacción débil: Aparecen bosones W^+ y W^- que se acoplan a los fermiones, y aumentan o disminuyen su carga en una unidad. Aparece también un bosón Z^0 cuyo acoplamiento generaría corrientes débiles neutras. Además, predice el acoplamiento electromagnético entre los bosones W^+ y W^- . No obstante, esta teoría no es válida para la interacción débil por las razones siguientes:

1) Predice que los bosones vectoriales tienen masa cero, con lo cual la interacción débil debería ser de largo alcance.

2) Exige que los fermiones acoplados por la interacción débil tengan la misma masa, lo cual es contrario a la experiencia.

10.5 Mecanismo de Higgs de ruptura espontánea de la simetría

Hemos visto que las teorías gauge locales hacen que los bosones gauge tengan masa cero, y además, los fermiones que interactúan debe tener la misma masa. Vamos a ver cómo puede conseguirse que los bosones gauge adquieran masa. Primeramente, consideraremos, a efectos didácticos, el mecanismo de Higgs en una teoría gauge de tipo $U(1)$, y posteriormente, consideraremos una teoría gauge de tipo $U(2)$.

10.5.1 Mecanismo de Higgs en una teoría $U(1)$

Vamos a suponer que existe un campo escalar, complejo Φ , que viene caracterizado por un lagrangiano descrito por

$$\mathcal{L}^{\Phi 0} = -\partial_\mu \Phi^*(x) \partial_\mu \Phi(x) - c^2 (\Phi^*(x) \Phi(x) - v^2/2)^2$$

Tomando $\Phi(x)$ como las variables dinámicas, puede expresarse la densidad lagrangiana en función de la densidad de energía cinética y la densidad de energía potencial: $\mathcal{L}^{\Phi 0} = \mathcal{T}^\Phi - \mathcal{V}^\Phi$, donde la densidad de energía cinética viene determinada por las variaciones del campo

$$\mathcal{T}^\Phi = -\partial_\mu \Phi^*(x) \partial_\mu \Phi(x)$$

y la densidad de energía potencial por el valor del campo

$$\mathcal{V}^\Phi = c^2 (\Phi^*(x) \Phi(x) - v^2/2)^2$$

La energía potencial se hace mínima cuando $|\Phi(x)| = v/\sqrt{2}$. Si este lagrangiano correspondiera al de un campo escalar libre, entonces $\mathcal{V}^\Phi = m^2 \Phi^*(x) \Phi(x)$, y la energía potencial se haría mínima cuando $\Phi(x) = 0$.

Vamos a considerar que el campo $\Phi(x)$ genera una representación de las transformaciones gauge de un grupo $U(1)$, dadas por

$$T(\Lambda) = \exp(i e Q \Lambda)$$

Donde Q es el generador del grupo. Entonces, si los bosones asociados a $\Phi(x)$ son autoestados del generador Q correspondientes a un autovalor q ,

$$\Phi(x) \rightarrow \exp(-i e q \Lambda) \Phi(x)$$

$$\Phi^*(x) \rightarrow \exp(i e q \Lambda) \Phi^*(x)$$

Nótese que si las transformaciones gauge del grupo $U(1)$ son las asociadas con la carga eléctrica entonces el campo $\Phi(x)$ estaría asociado a bosones de espín cero y de carga q .

El lagrangiano es invariante frente a transformaciones gauge globales, pero no frente a transformaciones gauge locales. Modificamos el lagrangiano para que sea invariante frente a transformaciones gauge locales, con lo que se tiene

$$D_\mu = \partial_\mu - i e Q A_\mu(x)$$

y el lagrangiano resulta,

$$\mathcal{L}^\Phi = -D_\mu^* \Phi^*(x) D_\mu \Phi(x) - c^2 (\Phi^*(x) \Phi(x) - v^2/2)^2$$

que es una expresión invariante gauge local, en la que se ha incluido el acoplamiento con el campo gauge $A_\mu(x)$. Podemos escribir

$$\Phi(x) = \exp(i\psi(x))(v + \eta(x))/\sqrt{2}$$

donde tanto $\psi(x)$ como $\eta(x)$ son campos reales. $\psi(x)$ corresponde a la fase de $\Phi(x)$, y $\eta(x)$ indica la desviación de $\Phi(x)$ con respecto al mínimo de energía potencial. Como el lagrangiano es invariante frente a transformaciones gauge locales, vamos a considerar una transformación en la cual $e q \Lambda(x) = \psi(x)$. En esa transformación, se tiene que

$$\Phi(x) \rightarrow (v + \eta(x))/\sqrt{2}$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \psi(x)/e q = A'_\mu(x)$$

Vamos a considerar situaciones de energía baja, en la cual el campo escalar $\Phi(x)$ tome valores próximos al mínimo de energía potencial. Ello implica que $\eta(x)$ va a ser mucho menor que v . Desarrollando el lagrangiano, e ignorando los términos de orden $(\eta(x)/v)^2$ o superior, se tiene

$$\mathcal{L}^\Phi \simeq \mathcal{L}^{mA} + \mathcal{L}^{H0} + \mathcal{L}^{AH}$$

donde

$$\mathcal{L}^{mA} = -1/2 g^2 v^2 (A'_\mu(x))^2$$

equivale a un término de masa para el campo $A'_\mu(x)$, en el que $m_A = gv$. Este término proviene del acoplamiento entre los bosones gauge y el campo escalar original $\Phi(x)$. De este campo, la fase $\psi(x)$ no es observable, ya que ha sido englobada en la transformación gauge local que define los campos $A'_\mu(x)$. Sólo es observable el campo $\eta(x)$, descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L}^{H0} = -1/2 (\partial_\mu \eta(x))^2 - c^2 v^2 (\eta(x))^2$$

La partícula asociada a este campo es el bosón de Higgs, que tiene espín cero y masa dada por $m_\eta = \sqrt{2}cv$. El bosón de Higgs está acoplado a los campos gauge a través del término

$$\mathcal{L}^{AH} = -g^2 v \eta(x) (A'_\mu(x))^2$$

Aunque \mathcal{L}^Φ es invariante frente a transformaciones gauge locales, la expresión aproximada $\mathcal{L}^{mA} + \mathcal{L}^{H0} + \mathcal{L}^{AH}$, válida a energías bajas, no manifiesta explícitamente la invariancia frente a transformaciones gauge locales, ya que contiene términos de masa para los bosones gauge. Por ello, se dice que se ha producido una ruptura espontánea de la simetría.

10.5.2 Mecanismo de Higgs en una teoría U(2)

Vamos a suponer que existen dos campos escalares, complejos Φ_i , $i = 1, 2$ que vienen caracterizado por un lagrangiano descrito por

$$\mathcal{L}^{\Phi 0} = - \sum_i \partial_\mu \Phi_i^*(x) \partial_\mu \Phi_i(x) - c^2 (\sum_i \Phi_i^*(x) \Phi_i(x) - v^2/2)^2$$

Vamos a considerar que los campos $\Phi_i(x)$ generan una representación de las transformaciones gauge de un grupo U(2). Entonces,

$$\Phi_i(x) \rightarrow \Phi_i(x) - ig \sum_a \Lambda_a \sum_j (I_a^w)_{ij} \Phi_j(x) - ig'(Y^w/2)_{ii} \Lambda' \Phi_j(x)$$

$$\Phi_i^*(x) \rightarrow \bar{\Phi}_i^*(x) + ig \sum_a \Lambda_a \sum_j (I_a^w)_{ij} \Phi_j^*(x) + ig'(Y^w/2)_{ii} \Lambda' \Phi_j^*(x)$$

Consideramos que el doblete de partículas asociadas a $\Phi_i(x)$ tienen isospín débil 1/2 e hipercarga débil 1. Por tanto, la carga eléctrica de la partícula correspondiente a $i = 1$ tiene carga eléctrica 1, y la de $i = 2$ tiene carga eléctrica 0. Las antipartículas, asociadas a $\Phi_i^*(x)$, tienen cargas opuestas. El lagrangiano es invariante frente a transformaciones gauge globales, pero no frente a transformaciones gauge locales. Modificamos el lagrangiano para que sea invariante frente a transformaciones gauge locales, con lo que se tiene

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} I_+^w W_\mu(x) - i \frac{g}{\sqrt{2}} I_-^w W_\mu^*(x) \\ &- i \frac{g}{\cos \theta_w} (\cos^2 \theta_w I_3^w - \sin^2 \theta_w Y^w/2) Z_\mu(x) - ie Q A_\mu(x) \end{aligned}$$

y el lagrangiano resulta,

$$\mathcal{L}^\Phi = - \sum_{ijk} (D_\mu)_{ji}^* \Phi_j^*(x) (D_\mu)_{ik} \Phi_k(x) - c^2 (\sum_i \Phi_i^*(x) \Phi_i(x) - v^2/2)^2$$

que es una expresión invariante gauge local, en la que se ha incluido el acoplamiento con los campos gauge.

Realizando una transformación gauge local del grupo U(2), podemos hacer que $\Phi_1(x) = 0$ y que $\Phi_2(x)$ sea puramente real. En esa transformación, se tiene que

$$(\Phi_1(x), \Phi_2(x)) \rightarrow (0, v/\sqrt{2} + \eta(x)/\sqrt{2})$$

donde $\eta(x)$ indica la desviación de los campos con respecto al mínimo de energía potencial. Los campos gauge originales $W_\mu, W_\mu^*, A_\mu, Z_\mu$ se modificarán englobando las derivadas de los parámetros relevantes que producen la transformación anterior, pasando a unos campos $W'_\mu, W_\mu'^*, A'_\mu, Z'_\mu$.

Vamos a considerar situaciones de energía baja, en la cual los campos escalares $\Phi(x)_i$ tomen valores próximos al mínimo de energía potencial. Podemos considerar que $\eta(x)$ va a ser mucho menor que v . Desarrollando el lagrangiano, e ignorando los términos los términos de orden $(\eta(x)/v)^2$ o superior, se tiene:

$$\mathcal{L}^\Phi \simeq \mathcal{L}^{mA} + \mathcal{L}^{H0} + \mathcal{L}^{AH}$$

donde

$$\mathcal{L}^{mA} = -1/4g^2v^2W_\mu'^*(x)W_\mu'(x) - 1/8(g^2/\cos^2\theta_w)v^2(Z'_\mu(x))^2$$

equivale a un término de masa para los campos $W'_\mu(x)$ y $Z'_\mu(x)$, en el que la masa de la partículas asociadas es $m_W = gv/2$ y $m_Z = gv/2\cos\theta_w$. El campo $A'_\mu(x)$ no tiene término de masa, como debe corresponder al campo electromagnético.

$$\mathcal{L}^{H0} = -1/2(\partial_\mu\eta(x))^2 - c^2v^2(\eta(x))^2$$

es el lagrangiano del campo escalar $\eta(x)$. La partícula asociada a este campo es el bosón de Higgs, que tiene espín cero y masa dada por $m_\eta = \sqrt{2}cv$. El bosón de Higgs está acoplado a los bosones gauge W^+, W^- y Z^0 a través del términos

$$\mathcal{L}^{AH} = -1/2g^2v\eta(x)W_\mu'^*(x)W_\mu'(x) - 1/4(g^2/\cos^2\theta_w)v\eta(x)(Z'_\mu(x))^2$$

Aunque \mathcal{L}^Φ es invariante frente a transformaciones gauge locales, la expresión aproximada $\mathcal{L}^{mA} + \mathcal{L}^{H0} + \mathcal{L}^{AH}$, válida a energías bajas, no es manifiestamente invariante frente a transformaciones gauge locales del grupo $U(2)$, ya que aparecen términos cuadráticos en los campos gauge. Por tanto, se dice que se ha producido una ruptura espontánea de la simetría.

10.6 Teoría Electrodébil

La teoría electrodébil de Weinberg y Salam es una teoría Gauge $U(2)$ en la que se incluye el mecanismo de Higgs de ruptura espontánea de la simetría. En esta teoría, la interacción electromagnética y débil vienen descritas por dos constantes de acoplo, g y g' . Las masas de los bosones W^\pm y Z^0 vienen dadas en función de las constantes de acoplo, y del parámetro v , que indica el valor del campo $\phi(x)$ que da la mínima energía potencial.

Constantes de acoplo A partir de los valores, evaluados para $E \simeq M(Z^0)$, $e = 0.31341$ y $\sin^2(\theta_w) = 0.23117$, se obtiene:

$$g = e/\sin(\theta_w) = 0.65185 \quad ; \quad g' = e/\cos(\theta_w) = 0.35744$$

Relación con la constante de Fermi La constante de Fermi G_F está relacionada con la constante de acoplo g y con la masa de la W a través de la expresión $G_F/\sqrt{2} = g^2/8m_W^2$. Sustituyendo el valor de $m_W = gv/2$, se obtiene que la constante de Fermi sólo depende del valor del parámetro v , con lo cual

$$v = 2^{-1/4}G_F^{-1/2} = 246.22\text{GeV}$$

Bosones vectoriales intermedios la interacción electro-débil se produce por el intercambio del fotón y de las partículas masivas W^+ , W^- y Z^0 . El intercambio de las W^\pm da cuenta de las corrientes débiles cargadas, mientras que en intercambio de la Z^0 describe las corrientes débiles neutras. A partir del valor de v y de las constantes de acoplo, puede predecirse la masa de la W , $m_W = gv/2 = 80.25 GeV$ y la de la Z^0 , $gv/2 \cos \theta_w = 91.53$, que están en excelente acuerdo con los experimentales $m_W = 80.41 GeV$ y $m_Z = 91.187 GeV$.

Masas de los fermiones La teoría electrodébil permite que las partículas de un doblete de isospín débil tengan distinta masa. Ello aparece introduciendo un acoplamiento entre el campo escalar $\Phi_i(x)$ y los campos fermiónicos $\psi_i(x)$, que sea invariante frente a transformaciones gauge locales, $\mathcal{L}^{F\Phi}$. Este acoplamiento da lugar a un término cuadrático en los campos fermiónicos cuando se realiza la ruptura espontánea de la simetría, \mathcal{L}^{Fm} , y queda un término que acopla el campo de Higgs a los fermiones \mathcal{L}^{FH} .

Quiralidad El hecho de que sólo los fermiones de quiralidad negativa sientan la interacción débil también aparece naturalmente, cuando se requiere que los fermiones de quiralidad negativa formen un doblete $I^w = 1/2$ frente a las transformaciones gauge locales del grupo $U(2)$, mientras que los fermiones de quiralidad positiva forman un singlete $I^w = 0$. Ello hace que aparezca en la expresión de las corrientes débiles cargadas un término $(1 - \gamma_5)/2$. Ello hace que sólo los fermiones (quarks y leptones) con quiralidad negativa contribuyan a las corrientes débiles cargadas. No obstante, los fermiones con quiralidad positiva y masa no nula contribuyen a las corrientes débiles neutras.

Número de familias La teoría electrodébil permite calcular con precisión muchas magnitudes. En concreto, pueden calcularse las anchuras de los bosones W^\pm y Z^0 . Los resultados están plenamente de acuerdo con la teoría electrodébil, y permiten afirmar que solamente existen tres neutrinos sin masa. Ello lleva a pensar que el número de familias de leptones y de quarks es de tres, con lo cual no quedarían nuevos fermiones por descubrir.

Bosón de Higgs La consistencia de la teoría electrodébil exige que exista una partícula fundamental, aún no descubierta, que es el bosón de Higgs. Esta partícula tiene carga nula y espín cero. La teoría electrodébil no predice la masa del bosón de Higgs, ya que depende del parámetro c , que no es conocido. No obstante, sus constantes de acoplamiento a los bosones gauge W^\pm y Z^0 son conocidas. También lo son las constantes de acoplamiento con los fermiones, que son tanto mayores cuanto mayor sea la masa del fermión. Las búsquedas de esta partícula permiten afirmar que, de existir, tiene una masa superior a 89.7 GeV. Por otro lado, un análisis detallado de los efectos indirectos del bosón de Higgs en una serie de resultados experimentales sugieren su masa debe ser inferior a 262 GeV (1999). Algunos resultados preliminares en el CERN (2000) indican que la masa del bosón de Higgs puede ser de 115 GeV.

En resumen, obtenemos que la teoría electrodébil se obtiene a partir de una teoría gauge $U(2)$ en la que se introduce un doblete de campos escalares que producen el mecanismo de Higgs de ruptura espontánea de la simetría. El lagrangiano viene dado por

$$\mathcal{L}^{EW} = \mathcal{L}^F + \mathcal{L}^A + \mathcal{L}^\Phi \simeq \mathcal{L}^{F'0} + \mathcal{L}^{FA} + \mathcal{L}^{A'} + \mathcal{L}^H$$

donde $\mathcal{L}^{F'0}$ es el lagrangiano de los fermiones sin interacción, en el que las masas de los fermiones pueden ser distintas ya que incluyen el acoplamiento al campo escalar \mathcal{L}^{mF} .

\mathcal{L}^{FA} describe la interacción de los fermiones con cuatro campos gauge, asociados a los bosones gauge γ , W^\pm y Z^0 , en función de las constantes g y g' .

$\mathcal{L}^{A'}$ es el lagrangiano de los bosones gauge, que incluye el término \mathcal{L}^A de la teoría $U(2)$ y los términos de masa \mathcal{L}^{mA} para W^\pm y Z^0 , que provienen del acoplamiento al campo escalar.

\mathcal{L}^H es el lagrangiano del bosón de Higgs, que incluye el término \mathcal{L}^{H0} , el término \mathcal{L}^{HA} que describe el acoplamiento a los bosones W^\pm y Z^0 , y también el término de acoplamiento a los fermiones, \mathcal{L}^{HF} , que es tanto mayor cuanto mayor sea la masa de los fermiones. Por ello, el bosón de Higgs se desintegrará principalmente en quarks $\bar{b}b$.

10.7 El Modelo Estándar

El desarrollo de la física de partículas, especialmente en la segunda mitad de este siglo, ha llevado a la formulación de un paradigma para explicar las propiedades fundamentales de la naturaleza.

El modelo estándar se considera un “modelo” y no una “teoría” ya que tiene un número relativamente alto de parámetros que deben determinarse a partir de la experiencia. Estos son: Las masas de los leptones cargados y de los quarks (9). Las constantes de acoplo de la teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica (3). Los parámetros de la matriz CKM (4). El valor del campo escalar v y la masa del bosón de Higgs (2).

Los ingredientes fundamentales del modelo estándar como paradigma actual de la naturaleza son los siguientes:

10.7.1 Partículas Elementales

Los constituyentes fundamentales de la naturaleza son fermiones con $J = 1/2$. Estos se dividen en leptones y quarks.

Los leptones aparecen en tres generaciones: $e - \nu_e$, $\mu - \nu_\mu$ y $\tau - \nu_\tau$. La interacción electro-débil conecta las partículas de cada generación. La interacción de color no actúa entre estas partículas. En cada generación, hay una partícula de carga -1, con masa no nula, y una de carga 0 y masa 0.

Los quarks aparecen también en tres generaciones: $u - d$, $c - s$, $t - b$. En cada generación hay una partícula de carga 2/3 y una de carga -1/3, con masas no nulas. Cada partícula puede aparecer en tres colores. La interacción de color actúa entre las partículas, dependiendo del color. La interacción débil conecta principalmente partículas de la misma generación, aunque también puede mezclar distintas generaciones, a través de la matriz CKM.

Los quarks no aparecen aislados en la naturaleza. Solamente aparecen sistemas de quarks que sean incoloros, es decir, invariantes frente a transformaciones del grupo $SU(3)_c$. Estos sistemas son los bariones, compuestos de tres quarks, y los mesones, compuestos de un quark y un antiquark.

Además, también debe considerarse como fundamental al bosón de Higgs, que, aunque aún no se haya descubierto, es un ingrediente fundamental del modelo estándar.

10.7.2 Interacciones

Las interacciones fundamentales son la interacción de color y la interacción electrodébil.

La interacción de color es una interacción que aparece en la cromodinámica cuántica (QCD). La QCD es una teoría gauge local que proviene de exigir que el lagrangiano que describe los quarks con los tres colores, sea invariante frente a transformaciones gauge locales del grupo $SU(3)_c$, que mezclan los quarks de diferentes colores. La interacción viene determinada por una constante, g_s . En la cromodinámica cuántica aparecen ocho

campos gauge, asociados a ocho bosones gauge, llamados gluones, que tienen $J = 1$ y masa cero. Cada gluón está asociado a un generador del grupo $SU(3)_c$. El acoplamiento de los gluones a los quarks viene caracterizado por las matrices de Gell-Mann λ_a , que representan a los generadores en la representación fundamental. Los gluones interactúan entre sí. Su acoplamiento viene determinado por las constantes de estructura f_{bc}^a del grupo $SU(3)$. Esta interacción provoca el confinamiento, por el que sistemas coloreados (quarks o gluones) no pueden aparecer libremente en la naturaleza. La QCD es la responsable de las propiedades de los hadrones, y de las interacciones fuertes entre ellos. No obstante, la no validez del tratamiento perturbativo para la QCD a energías bajas (1 GeV) hace que no haya sido posible hasta ahora predecir las propiedades de los hadrones a partir de la QCD.

La interacción electrodébil es la que aparece en la teoría electrodébil (TED). La TED es una teoría gauge local que proviene de exigir que el lagrangiano que describe los fermiones de un doblete de isospín débil sea invariante frente a transformaciones del grupo $U(2)$, que mezclan estos fermiones. La interacción electrodébil viene determinada por dos constantes de acoplo g y g' . En la TED aparecen cuatro campos gauge, uno de los cuales es el campo electromagnético, que lleva asociado el fotón, y los otros describen la interacción con corrientes débiles cargadas y neutras, y llevan asociadas los bosones vectoriales W^+ , W^- y Z^0 . Estos bosones adquieren masa por el mecanismo de Higgs de ruptura espontánea de la simetría. Este mismo mecanismo hace que las masas de los fermiones de un doblete de isospín débil sean diferentes. El acoplamiento del fotón y de los bosones vectoriales W^+ , W^- y Z^0 con los fermiones viene caracterizado por las matrices que representan a los generadores de $U(2)$ en la representación fundamental. El acoplamiento de estos bosones entre sí viene caracterizado por las constantes de estructura de $U(2)$.

10.7.3 Marco teórico

El marco teórico del modelo estándar es el de las teorías gauge locales. En estas teorías, la interacción surge naturalmente a partir de las propiedades de simetría de los sistemas sin interacción. En este sentido, la teoría clásica del electromagnetismo y la teoría general de la gravitación son teorías gauge locales, aunque clásicas. La Electrodinámica Cuántica fué la primera teoría cuántica de campos que se obtuvo como una teoría gauge local. Posteriormente, se obtuvo la Cromodinámica Cuántica y la Teoría Electrodébil. Las teorías gauge locales son renormalizables. No obstante, su mayor atractivo viene de que son conceptualmente muy simples, pues provienen del concepto de que las transformaciones de simetría tienen sentido cuando se realizan localmente, y no en todo el espacio. Al mismo tiempo, son capaces de desarrollar una gran riqueza de fenómenos, en pleno acuerdo con la experiencia.

10.8 Problemas

1) Considera el lagrangiano clásico de una partícula de masa m que se mueve en dos dimensiones (x, y) en un potencial $V(r)$, donde $r^2 = x^2 + y^2$.

Demuestra que este lagrangiano es invariante frente a rotaciones de un ángulo ϕ , cuando ϕ es independiente del tiempo (transformación gauge global).

Demuestra que el lagrangiano no es invariante frente a rotaciones de un ángulo $\phi(t)$ (transformación gauge local).

Demuestra que introduciendo una nueva variable w (campo gauge), sustituyendo dx/dt por $dx/dt + wy$, y dy/dt por $dy/dt - wx$, el lagrangiano modificado es invariante frente a transformaciones gauge locales, exigiendo que w se transforme en $w - d\phi(t)/dt$.

Comprueba que el lagrangiano modificado corresponde al lagrangiano en un sistema de referencia no inercial que rota con velocidad w . Los términos centrífugo y de Coriolis son el equivalente a las interacciones gauge locales.

2) Considera el lagrangiano clásico modificado (con w) del problema anterior. $V(r)$ es mínimo para $r = R$, $V(r) = 1/2K(r - R)^2$. Considera una rotación $\phi(t)$ que pase de las variables (x, y) a $(r, 0)$. Desarrolla el nuevo lagrangiano tomando $r = R + a$, y suponiendo que a es pequeño. Relaciona los términos que aparecen con los del mecanismo de Higgs.

3) Partiendo de la expresión de las matrices de Gell-Mann, obtén las constantes de acoplo de todos los quarks con todos los gluones.

4) Obtén las constantes de acoplo del electrón y el neutrino con los bosones vectoriales de la teoría electrodébil γ , W^+ , W^- y Z^0 . Hacer lo propio para los quarks u y d .

5) Obtén la expresión explícita de los términos en primer orden en g y g' del lagrangiano de interacción de los bosones vectoriales de la teoría electrodébil γ , W^+ , W^- y Z^0 , expresando las constantes de acoplo pertinentes.

6) Suponiendo que la masa del bosón de Higgs resulte ser de 115 GeV, obtén el valor del parámetro c de la teoría electrodébil. Deduce cuál es el valor de la densidad de energía potencial para que $\Phi_i(x) = 0$. A partir de ese valor, estima cuál debe ser la energía por cada fm^3 para que se manifieste explícitamente la simetría frente a transformaciones gauge locales U(2).